پاسخنامه
ریاضی
نمایی و لگاریتم

www.mapedu.ir

کانون
فرهنگی
آموزش
قلم‌چی

– گزینهٔ «۲» *(لیلا مرادی)*

باید xهایی به طول ۱ و ۱۱ را در تابع $y = 2x + 3$ نقاط مشخص شود، سپس آن‌ها را در تابع $f(x)$ صدق دهیم.

$x = 1 \Rightarrow y = 2 + 3 = 5$

$x = 11 \Rightarrow y = 2 \times 11 + 3 = 25$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x) = 5^{A-B} = 5^1 \Rightarrow A - B = 1$

$\begin{pmatrix} 11 \\ 25 \end{pmatrix} \Rightarrow f(11) = 5^{11A-B} = 25 = 5^2 \Rightarrow 11A - B = 2$

با حل دستگاه دو معادله دو مجهول بالا خواهیم داشت: $B = \frac{-9}{10}, A = \frac{1}{10}$

درنتیجه: $f(x) = 5^{\frac{1}{10}x + \frac{9}{10}}$ خواهد بود، حال عرض از مبدأ را باید به‌دست آوریم:

$x = 0 \Rightarrow y = 5^{\frac{9}{10}} = \sqrt[10]{5^9}$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۴)

جایگذاری کنیم تا عرض این

– گزینهٔ «۱» *(سجاد داوطلب)*

ابتدا معادله را به فرم $\frac{2^x}{2} - \frac{2^5}{2^x} = 31/5$ می‌نویسیم. حالا با فرض $2^x = t$، داریم:

$\frac{t}{2} - \frac{32}{t} = 31/5 \xrightarrow{\times 2t} t^2 - 64 = 63t$

$\Rightarrow t^2 - 63t - 64 = 0 \Rightarrow (t - 64)(t + 1) = 0$

$\begin{cases} t = 64 \Rightarrow 2^x = 64 \Rightarrow 2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6 \\ t = -1 \Rightarrow 2^x = -1 \text{ غ ق ق} \end{cases}$

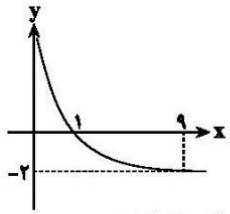
مطلوب سؤال برابر است با: $\log_4^{(x+2)} \xrightarrow{x=6} \log_4^8 = \log_{2^2}^{2^3} = \frac{3}{2} = 1/5$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۳ تا ۱۱۴)

– گزینهٔ «۴» *(عرفان رفائی)*

برد تابع $y = \sqrt{x}$ بازهٔ $[0, +\infty)$ است، بنابراین برد تابع $y = (\sqrt{x} - 9)$ برابر $[9, +\infty)$ است.

پس در واقع باید برد تابع $T \in [9, +\infty)$ و $y = \log_{\frac{1}{3}}^{T}$ را محاسبه می‌کنیم که به کمک رسم نمودار $y = \log_{\frac{1}{3}}^{(T)}$ به راحتی قابل محاسبه است:



بنابراین برد تابع f برابر $(-\infty, -2]$ است.

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۱۸)

– گزینهٔ «۱» *(اکبر کلاه‌ملکی)*

$\frac{\log x_1 + \log x_2}{\log(x_1 + x_2)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\log(x_1 x_2)}{\log(x_1 + x_2)} = \frac{1}{2} = \frac{\log a}{\log 4} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \log a = \frac{1}{2}\log 4 = \log 2 \Rightarrow a = 2$

توجه: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $Ax^2 + Bx + C = 0$ باشد، آن‌گاه داریم:

$x_1 + x_2 = \frac{-B}{A} = -4$

$x_1 x_2 = \frac{C}{A} = \frac{a}{1} = a$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۴)

– گزینهٔ «۴» *(وحید انصاری)*

$\left.\begin{array}{l} 1)\ 2a + b = 0 \\ 2)\ \frac{1}{2}a + b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = \frac{4}{3} \end{cases}$

$3)\ f(-1) = 1 \Rightarrow 1 = \log_c(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}) \Rightarrow \log_c^2 = 1 \Rightarrow c = 2$

$f(x) = \log_2(\frac{-2}{3}x + \frac{4}{3})$

توجه: $\begin{cases} f(-4) = \log_2^4 = 2 \\ \Rightarrow f^{-1}(2) = -4 \end{cases}$

بنابراین جواب $2 - 4 = -2$ می‌باشد.

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۱۸)

– گزینهٔ «۴» *(سروش موئینی)*

$\log_y^{x^2} - \log_x^{\sqrt{y}} = \frac{3}{2}$

توان را به پشت می‌بریم:

$\Rightarrow 2\log_y^x - \frac{1}{2}\log_x^y = \frac{3}{2}$

$\xrightarrow{\log_y^x = t} 2t - \frac{1}{2t} = \frac{3}{2} \xrightarrow{\times 2t} 4t^2 - 3t - 1 = 0$

$\xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است.}} \begin{cases} t = \log_y^x = 1 \\ t = \log_x^x = -\frac{1}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = y \text{ غ ق ق} \\ x = y^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow y = \frac{1}{x^4} \end{cases}$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۴)

www.mapedu.ir

– گزینهٔ «۲» *(ممبر علیزاده)*

با توجه به فرمول زیر داریم:

$$\underset{\text{جرم باقی‌مانده پس از t سال}}{Q(t)} = \underset{\text{جرم اولیه}}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

زمان برحسب سال ← t

T → نیمه عمر

با توجه به رابطهٔ داده شده، مقدار T را به‌دست می‌آوریم:

$$Q_{(29)} = \frac{1}{8}Q_{(11)} \Rightarrow \frac{Q_{(29)}}{Q_{(11)}} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{m\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{29}{T}}}{m\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{11}{T}}} \Rightarrow \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{18}{T}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3}$$

$$\Rightarrow \frac{18}{T} = 3 \Rightarrow T = 6$$

مطلوب سؤال برابر است با:

$$Q(t) = m\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} \quad t=? \quad \frac{1}{5}\cancel{m} = \cancel{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = 2^{\frac{t}{6}} \quad 5$$

از دو طرف لگاریتم در مبنای ۲ می‌گیریم:

$$\Rightarrow \frac{t}{6} = \log_2 5 \Rightarrow t = 6\log_2 5 \Rightarrow t = 6\times\frac{\log 5}{\log 2} \Rightarrow t = 6\times\frac{1-\log 2}{\log 2}$$

$$t = 6\,\frac{1-0/3}{0/3} = 6\,\frac{0/7}{0/3} \quad 14 \text{ سال}$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۱۸)

– گزینهٔ «۱» *(سهیل حسن‌خان‌پور)*

باید ابتدا دامنهٔ لگاریتم را به‌دست بیاوریم:

$$3x^2 - |x| > 0 \xrightarrow[x^2=|x|^2]{|x|=t} 3t^2 - t > 0 \Rightarrow t(3t-1) > 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} & & 0 & & \frac{1}{3} & \\ \hline & + & | & - & | & + \end{array} \begin{cases} t > \frac{1}{3} \\ \text{یا} \\ t < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x| > \frac{1}{3} \Rightarrow x > \frac{1}{3} \text{ یا } x < -\frac{1}{3} \ (I) \\ |x| < 0 \Rightarrow \text{جواب ندارد.} \end{cases}$$

حال باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد:

$$1 + \log_{\frac{1}{2}} 3x^2 - |x| \geq 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 3x^2 - |x| \geq -1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 3x^2 - |x| \geq \log_{\frac{1}{2}} 2$$

نمودار $\log_a^x$ وقتی $0 < a < 1$ باشد، اکیداً نزولی است. پس داریم:

$$3x^2 - |x| \leq 2 \xrightarrow{|x|=t} 3t^2 - t - 2 \leq 0 \Rightarrow (t-1)(3t+2) \leq 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} & & -\frac{2}{3} & & 1 & \\ \hline & + & | & - & | & + \end{array} \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq t \leq 1$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3} \leq |x| \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \ (II)$$

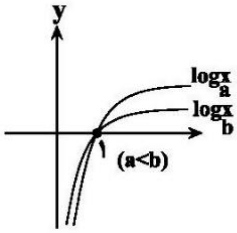
$$(I) \cap (II) \Rightarrow \left(-1 \leq x < -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3} < x \leq 1\right)$$

$$\Rightarrow a = 1, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{3}, d = 1$$

$$2a - b - 4c + 3d = 2 + \frac{1}{3} - \frac{4}{3} + 3 = 0$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحهٔ ۱۰۵ تا ۱۱۸)

– گزینهٔ «۳» *(مهدی براتی)*



$$f(x) < g(x) \Rightarrow \log_9 \frac{27}{2x+3} < 2 - \log_4 2(2x+3)$$

$$\Rightarrow \log_9^{27} - \log_9^{(2x+3)} < 2 - \log_4^2 - \log_4^{(2x+3)}$$

$$\frac{3}{2} - \log_9^{(2x+3)} < 2 - \frac{1}{2} - \log_4^{(2x+3)} \Rightarrow \log_4^{(2x+3)} < \log_9^{(2x+3)}$$

با توجه به شکل فوق نتیجه می‌گیریم که: $\log_a^t < \log_b^t \xrightarrow{(a<b)} 0 < t < 1$

بنابراین داریم: $\log_4^{(2x+3)} < \log_9^{(2x+3)} \Rightarrow 0 < 2x+3 < 1$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} < x < -1 \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{3}{2} \\ n = -1 \end{cases} \Rightarrow m + n = \frac{-5}{2}$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۱۸)

– گزینهٔ «۴» *(بهرام ملاج)*

ابتدا از هر دو طرف معادله، لگاریتم در مبنای ۲ می‌گیریم:

$$\log_2^{x(\log_2^x - 3)} = \log_2^{16} \Rightarrow (\log_2^x - 3)(\log_2^x) = 4$$

$$\xrightarrow{\log_2^x = t} t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \Rightarrow \log_2^x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ t = 4 \Rightarrow \log_2^x = 4 \Rightarrow x = 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{ضرب ریشه‌ها} = \frac{1}{2} \times 16 = 8$$

توجه: $\log_2^{x^a} = a\log_2^x$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۴)

– گزینهٔ «۴» *(محمدسیار پیشوایی)*

با توجه به اینکه نمودار تابع نمایی ۲ واحد پایین آمده است، پس $a=-2$ همچنین نقطهٔ $(0,2)$ را در تابع صدق می‌دهیم.

$$f(0)=2\Rightarrow -2+2^{0+b}=2\Rightarrow 2^b=4\Rightarrow b=2$$

لذا ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=-2+2^{x+2}$ خواهد بود.

$$f^{-1}(2b-1)=f^{-1}(3)=?$$

پس به‌جای معکوس کردن، در تابع اصلی y را برابر ۳ قرار می‌دهیم.

$$3=-2+2^{x+2}\Rightarrow 2^{x+2}=5\Rightarrow x+2=\log_2^5\Rightarrow x=\log_2^5-2$$

$$x=\log_2^5-\log_2^4\Rightarrow \log_2^{\frac{5}{4}}$$

بنابراین خواهیم داشت: $f^{-1}(3)=\log_2^{\frac{5}{4}}$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۹۸ تا ۱۱۶)

– گزینهٔ «۳» *(محمدابراهیم توزنده‌جانی)*

می‌دانیم:

$$\log_k^a=\frac{\log_c^a}{\log_c^k}\ ,\ \log_k^{a^n}=n\log_k^a\ ,\ \log 5=1-\log 2$$

$$,\ \log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}$$

$$\log_{54}^{\sqrt{125}}=\frac{\log\sqrt{125}}{\log 54}=\frac{\log\sqrt{5^3}}{\log(27\times 2)}$$

$$=\frac{\log 5^{\frac{3}{2}}}{\log 27+\log 2}=\frac{\frac{3}{2}\log 5}{3\log 3+\log 2}=\frac{\frac{3}{2}(1-\log 2)}{3\log 3+\log 2}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}(1-m)}{3n+m}=\frac{3-3m}{6n+2m}$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۴)

– گزینهٔ «۴» *(مهدی براتی)*

با توجه به ویژگی‌های لگاریتم داریم:

$$\log_3^{x^2}=2\log_3^x\ ,\ \log_3^{\frac{x}{9}}=\log_3^x-\log_3^9=\log_3^x-2$$

بنابراین معادله را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(2\log_3^x)(\log_3^x-2)=\frac{-3}{2}$$

با فرض $t=\log_3^x$ داریم:

$$2t(t-2)=\frac{-3}{2}\Rightarrow 2t^2-4t+\frac{3}{2}=0$$

$$\Rightarrow 4t^2-8t+3=0$$

$$\Rightarrow (2t-3)(2t-1)=0\Rightarrow\begin{cases} t=\frac{3}{2}\Rightarrow \log_3^x=\frac{3}{2} \\ \Rightarrow x=3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3} \\ t=\frac{1}{2}\Rightarrow \log_3^x=\frac{1}{2} \\ \Rightarrow x=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\end{cases}$$

با توجه به اینکه هر دو جواب قابل قبول هستند، مجموع جواب‌ها برابر $4\sqrt{3}$ است.

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۴)

– گزینهٔ «۴» *(کاظم اجلالی)*

ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\log_3^x.\log_3^{(x-1)}-2(\log_3^{x^2}+\log_3^{(x-1)})+8=0$$

$$\log_3^x.\log_3^{(x-1)}-2(2\log_3^x+\log_3^{(x-1)})+8=0$$

اگر فرض کنیم $a=\log_3^x$ و $b=\log_3^{(x-1)}$ معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$ab-2(2a+b)+8=0\Rightarrow ab-4a-2b+8=0$$

$$a(b-4)-2(b-4)=0\Rightarrow (a-2)(b-4)=0$$

$$\begin{cases} a=2=\log_3^x\Rightarrow x=9 \\ b=4=\log_3^{(x-1)}\Rightarrow x-1=81\Rightarrow x=82\end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر ۹۱ است.

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۴)

– گزینهٔ «۲» *(عادل حسینی)*

نمودار تابع مربوط به نمودار $y=8^{x+a}$ است که ۲ واحد به پائین منتقل شده است، پس $b=-2$ است. $f(x)=8^{x+a}-2$

از طرفی نمودار از مبدأ می‌گذرد، یعنی $f(0)=0$ است:

$$\Rightarrow 8^a-2=0\Rightarrow 8^a=2^{3a}=2\Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f(x)=8^{x+\frac{1}{3}}-2=2^{3x+1}-2$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right)=2^{1+1}-2=4-2=2$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۱۸)

– گزینهٔ «۳» *(شاهین پروازی)*

$$\log_{12}^{81}=4\log_{12}^3=k\Rightarrow \log_{12}^3=\frac{k}{4}$$

$$\Rightarrow \log_3^{12}=\frac{4}{k}\Rightarrow 1+2\log_3^2=\frac{4}{k}$$

$$\Rightarrow \log_3^2=\frac{4-k}{2k}$$

با درنظر گرفتن قانون تغییر مبنا داریم:

$$\Rightarrow \log_3^{32}=5\log_3^2=-\frac{5(k-4)}{2k}$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲ صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۴)

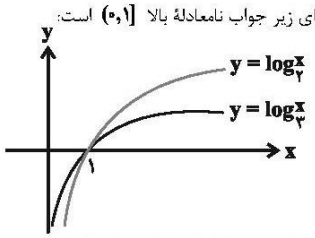
– گزینهٔ «۱» *(شاهین پروازی)*

مخرج نباید صفر باشد: $2^x\neq 2\Rightarrow x\neq 1$

و هم چنین عبارت زیر رادیکال نامنفی باید باشد:

$$\log_4^x\geq \log_2^x$$

با توجه به نمودارهای زیر جواب نامعادلهٔ بالا $(0,1]$ است:



در نتیجه دامنهٔ تابع داده شده بازهٔ $(0,1)$ است که شامل هیچ عدد صحیحی نیست.

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۱۴)

– گزینهٔ «۳» *(یاسین سپهر)*

هر چهار گزینه را بررسی می‌کنیم.

گزینهٔ «۱»: $\log_{7}(\sqrt[3]{7})^{2} = \log_{7}7^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\log_{7}7 = \frac{2}{3}$

گزینهٔ «۲»:

$$\log_{5}(\sqrt{125})^{3} = 3\log_{5}\sqrt{5^{3}} = 3\log_{5}5^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2}\log_{5}5 = \frac{9}{2} = 4/5$$

گزینهٔ «۳»: $\log_{3}\sqrt[3]{3^{5}} = \log_{3}3^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}\log_{3}3 = \frac{5}{3}$

گزینهٔ «۴»: $\log_{(11+6\sqrt{2})^{2}}(3+\sqrt{2})^{4} = \log_{(11+6\sqrt{2})^{2}}((3+\sqrt{2})^{2})^{2} = \log_{(11+6\sqrt{2})^{2}}(9+6\sqrt{2}+2)^{2}$

$$= \log_{(11+6\sqrt{2})^{2}}(11+6\sqrt{2})^{2} = 1$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۴)

– گزینهٔ «۲» *(شاهین پروازی)*

می‌دانیم $\log_{4}x^{2} = \log_{2}|x|$ است و با توجه به دامنهٔ معادله $(-x-2>0 \Rightarrow x<-2)$ تساوی $\log_{2}^{|x|} = \log_{2}(-x)$ است. پس داریم:

$$\log_{2}(-x)+\log_{2}(-x-2) = 2$$

$$\Rightarrow \log_{2}(-x)(-x-2) = 2 \Rightarrow (-x)(-x-2) = 4$$

$$\Rightarrow x^{2}+2x-4 = 0 \Rightarrow \Delta = 4-4(1)(-4) = 20$$

$$x_{1},x_{2} = \frac{-2\pm\sqrt{20}}{2}$$

با توجه به دامنه غیرقابل قبول است.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{1} = \frac{-2+\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}-1 \\ x_{2} = \frac{-2-\sqrt{20}}{2} = -1-\sqrt{5} = a \end{cases}$$

$$\Rightarrow -1-a = \sqrt{5} \Rightarrow \log_{125}\sqrt{5} = \frac{1}{6}\log_{5}5 = \frac{1}{6}$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۴)

– گزینهٔ «۳» *(رضا سیدنوری)*

با توجه به شکل واضح است که نمودار تابع نمایی یک واحد پایین آمده است، یعنی $c=-1$ از طرفی تابع از نقطهٔ $(0,3)$ می‌گذرد پس:

$$3 = a(b)^{0}-1 \Rightarrow a = 4$$

با توجه به نمودار مشخص است تابع از $(-2,0)$ نیز می‌گذرد بنابراین:

$$0 = 4(b)^{-2}-1 \Rightarrow \frac{1}{4} = b^{-2} \Rightarrow 2^{-2} = b^{-2} \Rightarrow b = 2$$

در نتیجه: $\frac{ab}{c} = -8$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳، ۱۱۵ تا ۱۱۸)

– گزینهٔ «۳» *(پویان طهرانیان)*

$x=\frac{1}{2}$ در معادله صدق می‌کند پس:

$$\log_{2}^{\frac{1}{2}} - \log_{\frac{1}{2}}^{k} = 3 \Rightarrow \log_{2}^{2^{-1}} - \log_{2^{-1}}^{k} = 3 \Rightarrow -1+\log_{2}^{k} = 3$$

$$\log_{2}^{k} = 4 \Rightarrow k = 2^{4} = 16$$

حال ریشهٔ دیگر را با نوشتن مجدد معادله پیدا می‌کنیم.

$$\log_{2}^{x} - \log_{x}^{16} = 3 \Rightarrow \log_{2}^{x} - 4\log_{x}^{2} = 3 \xrightarrow{\log_{2}^{x}=t}$$

$$t-4(\frac{1}{t}) = 3 \xrightarrow{\times t} t^{2}-3t-4 = 0 \begin{cases} t=-1 \\ t=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_{2}^{x} = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ \log_{2}^{x} = 4 \Rightarrow x = 16 \end{cases}$$

بنابراین ریشهٔ دیگر معادله برابر $x=16$ است.

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۴)

– گزینهٔ «۱» *(پویان طهرانیان)*

$$\log_{n}^{mn} = a \Rightarrow \log_{mn}^{n} = \frac{1}{a}$$

از طرفی $\log_{mn}^{m}+\log_{mn}^{n} = \log_{mn}^{mn} = 1 \Rightarrow \frac{1}{3}+\frac{1}{a} = 1$

$$\frac{1}{a} = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \log_{36}^{4(\frac{3}{2})} = \log_{36}^{6} = \frac{1}{2}$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۴)

– گزینهٔ «۱» *(مصطفی کرمی)*

$$4^{x}-5\times 2^{x+1}+21 = 0$$

$$(2^{x})^{2}-10(2^{x})+21 = 0 \Rightarrow 2^{x} = 3 \text{ یا } 2^{x} = 7$$

$$\Rightarrow x = \log_{2}^{3} \text{ یا } \log_{2}^{7}$$

$$\text{نسبت خواسته شده} = \frac{\log_{2}^{3}}{\log_{2}^{7}} = \log_{7}^{3}$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۱۴)

– گزینهٔ «۲» *(عباس اشرفی)*

روش اول:لگاریتم اول را به کمک فرمول‌های لگاریتمی ساده می‌کنیم:

$$\log_{12}^{18} = \frac{\log 18}{\log 12} = \frac{\log 3^{2}\times 2}{\log 2^{2}\times 3} = \frac{2\log 3+\log 2}{2\log 2+\log 3} = k$$

در دو طرف تساوی آخر، صورت‌ها را با مخرج‌ها جمع می‌کنیم.

$$\frac{(2\log 3+\log 2)+(2\log 2+\log 3)}{2\log 2+\log 3} = \frac{k+1}{1}$$

$$\frac{3(\log 3+\log 2)}{\log 12} \quad k \quad 1 \quad \frac{\log 6}{\log 12} \quad \frac{k+1}{3} \quad \log_{12}^{6} \quad \frac{k+1}{3}$$

برای محاسبهٔ $\log_{18}^{6}$ می‌توانیم به شیوهٔ زیر عمل کنیم:

$$\log_{18}^{6} = \frac{\log_{12}^{6}}{\log_{12}^{18}} = \frac{\frac{k+1}{3}}{k} = \frac{k+1}{3k}$$

روش دوم:

$$\log_{12}^{18}=\frac{\log 18}{\log 12}=\frac{2\log 3+\log 2}{2\log 2+\log 3}=k$$
$$\Rightarrow 2\log 3+\log 2=k\log 3+2k\log 2$$
$$\Rightarrow \log 3=\frac{(2k-1)}{2-k}\log 2$$

لگاریتم مورد نظر برابر می‌شود با:

$$\log_{18}^{6}=\frac{\log 6}{\log 18}=\frac{\log 2+\log 3}{2\log 3+\log 2}$$
$$=\frac{\log 2(1+\frac{2k-1}{2-k})}{\log 2(1+\frac{2(2k-1)}{2-k})}=\frac{\frac{k+1}{2-k}}{\frac{3k}{2-k}}=\frac{k+1}{3k}$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۴)

– گزینهٔ «۱» *(سروش موئینی)*

اگر $\log_{15}^{3}$ را x در نظر بگیریم داریم:

$$\log_{15}^{5}=\log_{15}^{\frac{15}{3}}=1-x$$
$$\log_{15}^{75}=\log_{15}^{15\times 5}=1+1-x=2-x$$

عبارت مورد نظر برابر می‌شود با:

$$-x(2-x)+x^2+2x(1-x)$$
$$=-2x+x^2+x^2+2x-2x^2=0$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۴)

– گزینهٔ «۱» *(سهیل حسن‌خان‌پور)*

می‌دانیم $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=(\sqrt{2})^2-1=1$ پس داریم:

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}+1)^{-1}$$

همچنین با توجه به اتحاد مکعب دوجمله‌ای داریم:

$$(\sqrt{2}+1)^3=(\sqrt{2})^3+3\times(\sqrt{2})^2\times 1+3\times\sqrt{2}\times 1^2+1^3$$
$$=2\sqrt{2}+6+3\sqrt{2}+1=7+5\sqrt{2}$$

حال این عبارات را در نامعادلهٔ سوال جایگذاری می‌کنیم:

$$((\sqrt{2}+1)^{-1})^{(-x^2+3x-2)}<((\sqrt{2}+1)^3)^2$$
$$\Rightarrow(\sqrt{2}+1)^{x^2-3x+2}<(\sqrt{2}+1)^6$$

چون $\sqrt{2}+1>1$ است داریم:

$$x^2-3x+2<6\Rightarrow x^2-3x-4<0\Rightarrow(x-4)(x+1)<0$$
$$\Rightarrow -1<x<4\Rightarrow\begin{cases}b=4\\a=-1\end{cases}\Rightarrow b+2a=4+2(-1)=2$$

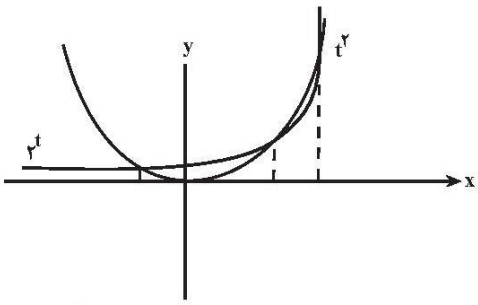
(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۴)

– گزینهٔ «۲» *(محمدحسن سلامی‌حسینی)*

$$f^{-1}(x):y=-2+\log_2^{(x+1)}\Rightarrow\log_2^{(x+1)}=2+y$$
$$\Rightarrow 1+x=2^{2+y}\Rightarrow f(x)=2^{x+2}-1$$
$$g(x)=(x+2)^2-1$$

حال ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=g(x)$ را بدست می‌آوریم:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow 2^{x+2}=(x+2)^2\xrightarrow{x+2=t}2^t=t^2\Rightarrow\begin{cases}t_1=2\\t_2=4\\-1<t_3<0\end{cases}$$



$$x+2=t\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=2\\-3<x_3<-2\end{cases}$$
$$\Rightarrow[x_1]+[x_2]+[x_3]=0+2+(-3)=-1$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۱۴)

– گزینهٔ «۴» *(آریان میدری)*

با توجه به متفاوت بودن پایه‌های دو طرف معادله، از طرفین لگاریتم در مبنای ۱۰ می‌گیریم:

$$\log 5^{7^x}=\log 7^{5^x}\xrightarrow[\text{در لگاریتم}]{\text{خاصیت انتقال توان}}(7^x)\log 5=(5^x)\log 7$$
$$\xrightarrow[\log 7=b]{\log 5=a}(7^x)(a)=(5^x)(b)\Rightarrow(\frac{5}{7})^x=\frac{a}{b}$$

مجدداً از طرفین، لگاریتم در مبنای ۱۰ می‌گیریم:

$$\log(\frac{5}{7})^x=\log(\frac{a}{b})\Rightarrow x\log(\frac{5}{7})=\log(\frac{a}{b})\xrightarrow[\text{به تفریق در لگاریتم}]{\text{خاصیت تبدیل تقسیم}}$$
$$x(\log 5-\log 7)=\log a-\log b\Rightarrow x=\frac{\log a-\log b}{\log 5-\log 7}\xrightarrow[\log 7=b]{\log 5=a}$$
$$\frac{\log a-\log b}{a-b}$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۴)

– گزینهٔ «۴» *(علی‌اصغر شریفی)*

ابتدا لگاریتم را باز می‌کنیم:

$$\log_4(ax)\log_4(bx)=-1\Rightarrow$$
$$(\log_4(a)+\log_4(x))(\log_4(b)+\log_4(x))=-1$$

با تغییر متغیر $t=\log_4(x)$ و ضرب پرانتزهای بالا به معادله درجهٔ دوم زیر می‌رسیم:

$$t^2+(\log_4(a)+\log_4(b))t+(\log_4(a)\log_4(b)+1)=0$$

معادلهٔ اولیه یک جواب بزرگ‌تر از ۱ و یک جواب کوچک‌تر از ۱ دارد، پس:

$$x_1<1<x_2\Rightarrow\log_4(x_1)<0<\log_4(x_2)\Rightarrow t_1<0<t_2\Rightarrow t_1t_2<0$$
$$\Rightarrow\log_4(a)\log_4(b)+1<0\Rightarrow\log_4(a)\log_4(b)<-1$$

گزینهٔ «۱ و ۲» که نمی‌توانند جواب باشند، چون حاصل $\log_4(a)\log_4(b)$ حتماً مثبت است. گزینهٔ «۳ و ۴» را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ «۳»:

$$\log_4(a)\log_4(b)=\log_4(\frac{1}{2})\log_4(9)=\frac{-1}{2}\log_4(9)=-\log_4(3)>-1$$

گزینهٔ «۴»:

$$\log_4(a)\log_4(b)=\log_4(3)\log_4^{\frac{1}{8}}=\frac{-3}{2}\log_4(3)=-\log_{16}(27)<-1$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۴)

www.mapedu.ir

20– گزینهٔ «۳» (رضا سیدنیظی)

با توجه به شکل واضح است که نمودار تابع نمایی یک واحد پایین آمده است، یعنی $c=-1$ از طرفی تابع از نقطهٔ $(0,3)$ می‌گذرد پس:

$$3=a(b)^0-1\Rightarrow a=4$$

با توجه به نمودار مشخص است تابع از $(-2,0)$ نیز می‌گذرد بنابراین:

$$0=4(b)^{-2}-1\Rightarrow \frac{1}{4}=b^{-2}\Rightarrow 2^{-2}=b^{-2}\Rightarrow b=2$$

در نتیجه: $\frac{ab}{c}=-8$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳، ۱۱۵ تا ۱۱۸)

21– گزینهٔ «۳» (پویان طهرانیان)

$x=\frac{1}{2}$ در معادله صدق می‌کند پس:

$$\log_2^{\frac{1}{2}}-\log_{\frac{1}{2}}^{k}=3\Rightarrow \log_2^{2^{-1}}-\log_{2^{-1}}^{k}=3\Rightarrow -1+\log_2^k=3$$

$$\log_2^k=4\Rightarrow k=2^4=16$$

حال ریشهٔ دیگر را با نوشتن مجدد معادله پیدا می‌کنیم.

$$\log_2^x-\log_x^{16}=3\Rightarrow \log_2^x-4\log_x^2=3\xrightarrow{\log_2^x=t}$$

$$t-4(\frac{1}{t})=3\xrightarrow{\times t}t^2-3t-4=0<\begin{matrix}t=-1\\ t=4\end{matrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\log_2^x=-1\Rightarrow x=\frac{1}{2}\\ \log_2^x=4\Rightarrow x=16\end{cases}$$

بنابراین ریشهٔ دیگر معادله برابر $x=16$ است.

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۴)

22– گزینهٔ «۱» (پویان طهرانیان)

$$\log_n^{mn}=a\Rightarrow \log_{mn}^n=\frac{1}{a}$$

از طرفی: $\log_{mn}^m+\log_{mn}^n=\log_{mn}^{mn}=1\Rightarrow \frac{1}{3}+\frac{1}{a}=1$

$$\frac{1}{a}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \log_{36}^{4(\frac{3}{2})}=\log_{36}^6=\frac{1}{2}$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۴)

23– گزینهٔ «۱» (مصطفی کرمی)

$$4^x-5\times 2^{x+1}+21=0$$

$$(2^x)^2-10(2^x)+21=0\Rightarrow 2^x=3 \text{ یا } 2^x=7$$

$$\Rightarrow x=\log_2^3 \text{ یا } \log_2^7$$

نسبت خواسته شده $=\frac{\log_2^3}{\log_2^7}=\log_7^3$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۱۴)

24– گزینهٔ «۲» (عباس اشرفی)

روش اول: لگاریتم اول را به کمک فرمول‌های لگاریتمی ساده می‌کنیم:

$$\log_{12}^{18}=\frac{\log 18}{\log 12}=\frac{\log 3^2\times 2}{\log 2^2\times 3}=\frac{2\log 3+\log 2}{2\log 2+\log 3}=k$$

در دو طرف تساوی آخر، صورت‌ها را با مخرج‌ها جمع می‌کنیم.

$$\frac{(2\log 3+\log 2)+(2\log 2+\log 3)}{2\log 2+\log 3}=\frac{k+1}{1}$$

$$\Rightarrow\frac{3(\log 3+\log 2)}{\log 12}=k+1\Rightarrow\frac{\log 6}{\log 12}=\frac{k+1}{3}\Rightarrow \log_{12}^6=\frac{k+1}{3}$$

برای محاسبهٔ $\log_{18}^6$ می‌توانیم به شیوهٔ زیر عمل کنیم:

$$\log_{18}^6=\frac{\log_{12}^6}{\log_{12}^{18}}=\frac{\frac{k+1}{3}}{k}=\frac{k+1}{3k}$$

روش دوم:

$$\log_{12}^{18}=\frac{\log 18}{\log 12}=\frac{2\log 3+\log 2}{2\log 2+\log 3}=k$$

$$\Rightarrow 2\log 3+\log 2=k\log 3+2k\log 2$$

$$\Rightarrow \log 3=\frac{(2k-1)}{2-k}\log 2$$

لگاریتم مورد نظر برابر می‌شود با:

$$\log_{18}^6=\frac{\log 6}{\log 18}=\frac{\log 2+\log 3}{2\log 3+\log 2}$$

$$=\frac{\log 2(1+\frac{2k-1}{2-k})}{\log 2(1+\frac{2(2k-1)}{2-k})}=\frac{\frac{k+1}{2-k}}{\frac{3k}{2-k}}=\frac{k+1}{3k}$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۴)

25– گزینهٔ «۱» (سروش موئینی)

اگر $\log_{15}^3$ را x در نظر بگیریم داریم:

$$\log_{15}^5=\log_{15}^{\frac{15}{3}}=1-x$$

$$\log_{15}^{75}=\log_{15}^{15\times 5}=1+1-x=2-x$$

عبارت مورد نظر برابر می‌شود با:

$$-x(2-x)+x^2+2x(1-x)$$

$$=-2x+x^2+x^2+2x-2x^2=0$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۴)

26– گزینهٔ «۱» (سهیل حسن‌خان‌پور)

می‌دانیم $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=(\sqrt{2})^2-1=1$ پس داریم:

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}+1)^{-1}$$

همچنین با توجه به اتحاد مکعب دوجمله‌ای داریم:

$$(\sqrt{2}+1)^3=(\sqrt{2})^3+3\times(\sqrt{2})^2\times 1+3\times\sqrt{2}\times 1^2+1^3$$

$$=2\sqrt{2}+6+3\sqrt{2}+1=7+5\sqrt{2}$$

حال این عبارات را در نامعادلهٔ سوال جایگذاری می‌کنیم:

$$((\sqrt{2}+1)^{-1})^{(-x^2+3x-2)}<((\sqrt{2}+1)^3)^2$$

$$\Rightarrow(\sqrt{2}+1)^{x^2-3x+2}<(\sqrt{2}+1)^6$$

چون $\sqrt{2}+1>1$ است داریم:

$$x^2-3x+2<6\Rightarrow x^2-3x-4<0\Rightarrow (x-4)(x+1)<0$$

$$\Rightarrow -1<x<4\Rightarrow\begin{cases}b=4\\ a=-1\end{cases}\Rightarrow b+2a=4+2(-1)=2$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۴)

27- گزینهٔ «۲» (محمدحسن سلامی‌حسینی)

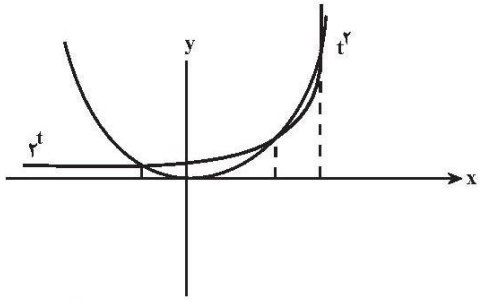
$$f^{-1}(x): y=-2+\log_2^{(x+1)} \Rightarrow \log_2^{(x+1)}=2+y$$

$$\Rightarrow 1+x=2^{2+y} \Rightarrow f(x)=2^{x+2}-1$$

$$g(x)=(x+2)^2-1$$

حال ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=g(x)$ را بدست می‌آوریم:

$$f(x)=g(x) \Rightarrow 2^{x+2}=(x+2)^2 \xrightarrow{x+2=t} 2^t=t^2 \Rightarrow \begin{cases} t_1=2 \\ t_2=4 \\ -1<t_3<0 \end{cases}$$



$$x+2=t \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=2 \\ -3<x_3<-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [x_1]+[x_2]+[x_3]=0+2+(-3)=-1$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۱۴)

28- گزینهٔ «۴» (آریان حیدری)

با توجه به متقاوت بودن پایه‌های دو طرف معادله، از طرفین لگاریتم در مبنای ۱۰ می‌گیریم:

$$\log 5^{7^x}=\log 7^{5^x} \xrightarrow[\text{در لگاریتم}]{\text{خاصیت انتقال توان}} (7^x)\log 5=(5^x)\log 7$$

$$\xrightarrow[\log 7=b]{\log 5=a} (7^x)(a)=(5^x)(b) \Rightarrow (\frac{5}{7})^x=\frac{a}{b}$$

مجدداً از طرفین، لگاریتم در مبنای ۱۰ می‌گیریم:

$$\log(\frac{5}{7})^x=\log(\frac{a}{b}) \Rightarrow x\log(\frac{5}{7})=\log(\frac{a}{b}) \xrightarrow[\text{به تفریق در لگاریتم}]{\text{خاصیت تبدیل تقسیم}}$$

$$x(\log 5-\log 7)=\log a-\log b \Rightarrow x=\frac{\log a-\log b}{\log 5-\log 7} \xrightarrow[\log 7=b]{\log 5=a}$$

$$\frac{\log a-\log b}{a-b}$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۴)

29- گزینهٔ «۴» (علی‌اصغر شریفی)

ابتدا لگاریتم را باز می‌کنیم:

$$\log_4(ax)\log_4(bx)=-1 \Rightarrow$$

$$(\log_4(a)+\log_4(x))(\log_4(b)+\log_4(x))=-1$$

با تغییر متغیر $t=\log_4(x)$ و ضرب پرانتزهای بالا به معادله درجهٔ دوم زیر می‌رسیم:

$$t^2+(\log_4(a)+\log_4(b))t+(\log_4(a)\log_4(b)+1)=0$$

معادلهٔ اولیه یک جواب بزرگ‌تر از ۱ و یک جواب کوچک‌تر از ۱ دارد، پس:

$$x_1<1<x_2 \Rightarrow \log_4(x_1)<0<\log_4(x_2) \Rightarrow t_1<0<t_2 \Rightarrow t_1t_2<0$$

$$\Rightarrow \log_4(a)\log_4(b)+1<0 \Rightarrow \log_2(a)\log_2(b)<-1$$

گزینهٔ «۱ و ۲» که نمی‌توانند جواب باشند، چون حاصل $\log_4(a)\log_4(b)$ حتماً مثبت است. گزینهٔ «۳ و ۴» را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ «۳»:

$$\log_4(a)\log_4(b)=\log_4(\frac{1}{2})\log_4(9)=\frac{-1}{2}\log_4(9)=-\log_4(3)>-1$$

گزینهٔ «۴»:

$$\log_4(a)\log_4(b)=\log_4(3)\log_4^{\frac{1}{8}}=\frac{-3}{2}\log_4(3)=-\log_{16}(27)<-1$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۴)

30- گزینهٔ «۳» (بهانبخش نیکنام)

عبارت داده شده به صورت زیر قابل بیان است:

$$\log_2^{24}\log_2^{96}-\log_2^{192}\log_2^{12}$$

$$(\log_2^2+\log_2^{12})(\log_2^8+\log_2^{12})-(\log_2^{12}+\log_2^{16})\log_2^{12}$$

حال اگر $\log_2^{12}=a$ در این‌صورت داریم:

$$(1+a)(3+a)-(a+4)a=a^2+4a+3-a^2-4a=3$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۴)

31- گزینهٔ «۳» (محمدحسن سلامی‌حسینی)

$$2x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{2}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)>2 \Rightarrow 2x-1<\frac{1}{4} \Rightarrow x<\frac{5}{8}$$

$$D_f=(\frac{1}{2},\frac{5}{8}) \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{5}{8} \end{cases}$$

$$\log_{4a}^{8b-1}=\log_2^4=2$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۱۴)

www.mapedu.ir

32- گزینهٔ «۲» *(بهزاد مشرمی)*

با توجه به نمودار تابع $f(x)$، داریم:

$$\overset{\text{محل برخورد با محور yها}}{f(0)=2} \xrightarrow{x=0} -1+3^{a\times 0-b}=2 \to 3^{-b}=3 \to -b=1 \to b=-1$$

$$\overset{\text{محل برخورد با محور xها}}{f(2)=0} =0 \xrightarrow{y=0} -1+3^{a\times 2-b}=0 \to 3^{2a-b}=1 \to 2a-b=0$$

$$\xrightarrow{b=-1} a=\frac{-1}{2}$$

همچنین با توجه به خط‌چین که $y=-1$ است، مقدار $c=-1$ بدست می‌آید.

بعد از بدست آوردن مقادیر a ، b و c سراغ حل معادله می‌رویم:

$$(-4a)^{bx+c}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{7x^2+1} \to (2)^{-x-1}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{7x^2+1}$$

$$\to (2)^{-x-1}=\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{7x^2+1} \to 2^{-x-1}=2^{\frac{-7}{2}x^2-\frac{1}{2}} \to -x-1=-\frac{7}{2}x^2-\frac{1}{2}$$

$$\to \frac{7}{2}x^2-x-\frac{1}{2}=0 \xrightarrow{\times 2} 7x^2-2x-1=0$$

$$\text{حاصل‌ضرب} \to P=\frac{c}{a}=-\frac{1}{7}$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۴ و ۱۱۵ تا ۱۱۸)

33- گزینهٔ «۴» *(رضا سیدنجفی)*

می‌دانیم که:

$$\log_3^7=\frac{1}{\log_7^3}$$

اگر $\log_7^3=b$ و $\log_3^2=a$ باشد خواهیم داشت:

$$\log_{21}^{14}=\frac{\log_3^{14}}{\log_3^{21}}=\frac{\log_3^{2\times 7}}{\log_3^{3\times 7}}=\frac{\log_3^2+\log_3^7}{\log_3^3+\log_3^7} \to \frac{a+\frac{1}{b}}{1+\frac{1}{b}}=\frac{ab+1}{b+1}$$

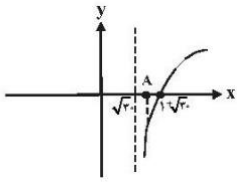
(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۴)

34- گزینهٔ «۲» *(علی هاجیان)*

$$\log\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\log(2x-10) \xrightarrow{x\neq 2} \log\frac{\cancel{(x-2)}(x-4)}{\cancel{x-2}}=\log(2x-10)$$

$$x-4=2x-10 \to x=6 \text{ ق ق}$$

نمودار تابع $f(x)=\log_2^{(x-\sqrt{30})}$ از انتقال نمودار $y=\log_2^x$ به سمت راست به اندازهٔ $\sqrt{30}$ واحد بدست می‌آید. می‌دانیم $\sqrt{30}\simeq 5/4$ و نمودار تابع f به‌صورت زیر است:



چون $\sqrt{30}<k=6<1+\sqrt{30}$، لذا مقدار $f(k)$ در این نقطه منفی است بنابراین نقطهٔ $(k,f(k))$ با طول مثبت و عرض منفی، در ناحیهٔ چهارم محور مختصاتی قرار دارد.

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۱۴)

www.mapedu.ir

اختلال یادگیری

- دامنه تعریف تابع $f(x)=\sqrt{2-\log_2^{(x-6)}}$، شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ متوسط)

$x-6>0 \Rightarrow x>6$

$2-\log_2^{(x-6)} \geq 0 \Rightarrow \log_2^{(x-6)} \leq 2 \Rightarrow x-6 \leq 4 \Rightarrow x \leq 10 \Rightarrow 6<x \leq 10$

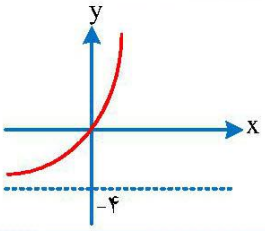
پس $D_f=(6,10]$ است، پس اعداد صحیحی که تابع به ازای آنها تعریف شده باشد، ۴ تا هستند.

نکته) عبارت $\log_{g(x)}^{f(x)}$ به شرطی تعریف شده است که: $f(x)>0$ و $g(x)>0$ و $g(x)\neq 1$ باشد.

نکته) $\log_b^a > c \Rightarrow \begin{cases} b>1 \rightarrow a>b^c \\ 0<b<1 \rightarrow a<b^c \end{cases}$

گروه آموزشی ماز

- نمودار تابع $f(x)=-a+2^{ax-b}$ به صورت زیر است. مقدار $f(2)$ کدام است؟



۱) ۱۰۲۸
۲) ۱۰۲۰
۳) ۵۱۶
۴) ۵۰۸

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ متوسط)

نکته ۱) $0<a<1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty \end{cases}$

نکته ۲) $a>1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty \end{cases}$

نکته ۳) تابع $f(x)=a^x$، برای $a>1$ صعودی اکید و برای $0<a<1$ نزولی اکید است.

تابع f صعودی اکید است، پس 2^{ax-b} صعودی اکید است. پس $a>0$ می‌باشد و به همین جهت $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{ax-b}=0$ خواهد شد. لذا:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-a+2^{ax-b})=-a$

از طرفی طبق نمودار، داریم: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-4$ ، پس $a=4$ می‌باشد.

باز هم طبق نمودار داریم: $f(0)=0 \Rightarrow -a+2^{-b}=0 \Rightarrow 2^{-b}=4 \Rightarrow b=-2$

لذا: $f(x)=-4+2^{4x+2} \Rightarrow f(2)=-4+2^{10}=1020$

www.biomaze.ir

- هرگاه $f(x)=x-[x]$ باشد، حاصل $f(\log_2^{24})$ با $f(\log_2^{n})$ برابر است، مقدار n کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۹۶ ۳) ۵۴ ۴) ۳۶

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ دشوار)

نکته) اگر اختلاف دو عدد α و β عددی صحیح باشد، آن‌گاه با فرض $f(x)=x-[x]$، مقدار $f(\alpha)$ با $f(\beta)$ برابر است.

$\log_2^{24}=\log_2^{8\times 3}=3+\log_2^3$

$f\left(\log_2^{24}\right)=f\left(\log_2^3+3\right)=\log_2^3+3-\left[3+\log_2^3\right]$

$=\log_2^3+3-3-\left[\log_2^3\right]=\log_2^3-\left[\log_2^3\right]$

www.mapedu.ir

گزینه ۲ را بررسی می‌کنیم، زیرا اختلاف آنها عددی صحیح شده است:

$$\log_{۲}^{۹۶} = \log_{۲}^{۳۲\times ۳} = ۵ + \log_{۲}^{۳}$$

به همین ترتیب:

$$f\left(\log_{۲}^{۲۴}\right) = f\left(\log_{۲}^{۹۶}\right) \Rightarrow n = ۹۶$$

گروه آموزشی ماز

- حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله $\log_{۲}^{x} = ۳ + \log_{x}^{۱۶}$، چند برابر حاصل جمع ریشه‌های آن است؟

۱) $\frac{۳۲}{۳۳}$ ۲) $\frac{۸}{۳۳}$ ۳) $\frac{۱۶}{۳۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳۱}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ متوسط)

نکته) $\log_{a}^{b}$ و $\log_{a}^{b}$ عکس یکدیگر هستند.

نکته) $\log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_{b}^{a} \quad (a, b > ۰ \ , \ b \neq ۱)$

$$\log_{۲}^{x} = A \Rightarrow \log_{x}^{۲} = \frac{۱}{A}$$

می‌دانیم:

$$\log_{x}^{۱۶} = \log_{x}^{۲^۴} = ۴\log_{x}^{۲} = ۴ \times \frac{۱}{A}$$

پس:

$$A = ۳ + \frac{۴}{A} \Rightarrow A^۲ - ۳A - ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} A = -۱ \\ A = ۴ \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -۱ \Rightarrow \log_{۲}^{x} = -۱ \Rightarrow x_۱ = \frac{۱}{۲} \\ A = ۴ \Rightarrow \log_{۲}^{x} = ۴ \Rightarrow x_۲ = ۱۶ \end{cases} \Rightarrow P = x_۱x_۲ = ۸ \ , \ S = x_۱ + x_۲ = ۱۶ + \frac{۱}{۲} = \frac{۳۳}{۲}$$

$$\frac{P}{S} = \frac{۸}{\frac{۳۳}{۲}} = \frac{۱۶}{۳۳}$$

www.biomaze.ir

- هرگاه به بزرگی زلزله‌ای ۲ واحد اضافه کنیم، انرژی آزاد شده آن چند برابر خواهد شد؟

۱) ۱۱۸۰ ۲) ۱۰۰ ۳) $۲^{۱۰}$ ۴) ۱۰۰۰

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲ ـ ساده)

نکته) اگر بزرگی زلزله M و انرژی آزاد شده E باشد، آن‌گاه:

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$$

ابتدا به کمک رابطهٔ $\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$ داریم:

اگر به بزرگی زلزله ۲ واحد اضافه کنیم، آن‌گاه انرژی آن را E' می‌نامیم و داریم:

$$\log E' = ۱۱/۸ + ۱/۵(M + ۲)$$

$$\log E' = \underbrace{۱۱/۸ + ۱/۵M}_{\log E} + ۳ \Rightarrow \log E' = \log E + ۳$$

$$\Rightarrow \log E' - \log E = ۳ \Rightarrow \log\frac{E'}{E} = ۳ \Rightarrow \frac{E'}{E} = ۱۰^۳ \Rightarrow E' = ۱۰۰۰E$$

پس انرژی آزاد شده ۱۰۰۰ برابر شده است.

گروه آموزشی ماز

- هرگاه n گرم نمک را به مقدار معینی آب اضافه کنیم، مقدار نمک حل نشده در آب بعد از t دقیقه، از رابطهٔ $f(t) = n(۰/۸)^t$ بدست می‌آید. حداقل پس از چند دقیقه، مقدار نمک حل نشده کم‌تر یا برابر ۲۰ درصد مقدار نمک اولیه است؟ $(\log ۲ = ۰/۳)$

۱) ۶ دقیقه ۲) ۷ دقیقه ۳) ۸ دقیقه ۴) ۹/۶ دقیقه

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ دشوار)

نکته۱)

$$0<\alpha<1\ ,\ 0<x_1<x_2 \Rightarrow \log_\alpha^{x_1}>\log_\alpha^{x_2}$$

$$\alpha>1\ ,\ 0<x_1<x_2 \Rightarrow \log_\alpha^{x_1}<\log_\alpha^{x_2}$$

نکته۲)

$$ab=n \Rightarrow \log_n^a+\log_n^b=1\ \ (n\neq 1\ \ ,\ \ a,b,n>0)$$

روش اول:

چون n مقدار نمک اولیه است، پس $\frac{f(t)}{n}$ مقدار نمک حل نشده به مقدار نمک اولیه است. برای یافتن حداقل مقدار t باید نامعادله $\frac{f(t)}{n}\le\frac{20}{100}$ را حل کنیم:

$$\Rightarrow \frac{n(0/8)^t}{n}\le\frac{2}{10}\Rightarrow(\frac{8}{10})^t\le\frac{2}{10}=\frac{1}{5}\Rightarrow(\frac{4}{5})^t\le\frac{1}{5}\Rightarrow 4^t\le 5^{t-1}$$

از طرفین، لگاریتم در مبنای ۱۰ می‌گیریم:

$$\Rightarrow t\log 4\le(t-1)\log 5$$

اما می‌دانیم: $\log 5=1-\log 2$

$$2t\log 2\le(t-1)(1-\log 2)\Rightarrow\frac{6}{10}t\le\frac{7}{10}(t-1)\Rightarrow 6t\le 7t-7\Rightarrow t\ge 7$$

روش دوم:

$$(0/8)^t\le 0/2\Rightarrow t\ge\log_{0/8}^{0/2}\Rightarrow\log_{\frac{8}{10}}^{\frac{2}{10}}=\frac{\log^{\frac{2}{10}}}{\log^{\frac{8}{10}}}=\frac{\log^2-\log^{10}}{\log^8-\log^{10}}=\frac{0/3-1}{0/9-1}=7\Rightarrow t\ge 7$$

- اگر $\log_{ba}^a=2$، مقدار $\log_b^{ba}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) -2 ۴) -1

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲ ـ متوسط)

نکته)

۱) $\log_b^a+\log_b^c=\log_b^{ac}$

۲) $\log_a^b=\frac{1}{\log_b^a}$

$$\log_{ab}^a=2\ ,\ \log_{ab}^b=k\ \Rightarrow\ \log_{ab}^a+\log_{ab}^b=2+k\Rightarrow\ 2+k=1\Rightarrow k=-1$$

$$k=\log_{ab}^b=-1\ \rightarrow\ \log_b^{ab}=\frac{1}{\log_{ab}^b}=\frac{1}{-1}=-1$$

سوالات منتخب:

اگر $\log_a^b=2$ و $\log_a^c=\frac{1}{3}$، مقدار $\log_{a^2}^{bc}$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{6}$ ✓ ۲) $\frac{6}{7}$ ۳) $\frac{12}{7}$ ۴) $\frac{7}{12}$

گروه آموزشی ماز

- اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $2\log_x^a+3\log_a^{\sqrt{x}}=4$ برابر ۴ باشد، مقدار $\log_{\sqrt{2}}^a$ کدام است؟

۱) ۲ یا ۸ ۲) ۲ یا ۶ ۳) ۸ یا ۶ ۴) ۱ یا ۳

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

۱) $\log_{b^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_b^a$ ۲) $\log_b^a.\log_a^b=1$

می‌دانیم $\log_{4}^{a}=\log_{2^2}^{a}=\frac{1}{2}\log_{2}^{a}$، پس:

$$x=4\Rightarrow 2\log_{4}^{a}+3\log_{a}^{2}=4\Rightarrow \log_{2}^{a}+3\log_{a}^{2}=4$$

از طرفی فرض می‌کنیم $\log_{2}^{a}=A$، پس:

$$A+\frac{3}{A}=4\Rightarrow A^2-4A+3=0\Rightarrow \begin{cases}A=1\\A=3\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}A=1\Rightarrow \log_{2}^{a}=1\Rightarrow a=2\Rightarrow \log_{\sqrt{2}}^{2}=2\\ A=3\Rightarrow \log_{2}^{a}=3\Rightarrow a=8\Rightarrow \log_{\sqrt{2}}^{8}=6\end{array}\right\}\Rightarrow \log_{\sqrt{2}}^{a}=2 \text{ یا } 6$$

- جواب معادلهٔ $4^{-x}=3^{+x}$ به صورت $\log_{6}^{\alpha}$ است. مقدار α کدام است؟

۱) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ۲) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ ۳) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ۴) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ دشوار)

نکته)

$$k\log_{\beta}^{\alpha}=\log_{\beta}^{\alpha^k}=\log_{\sqrt[k]{\beta}}^{\alpha}$$

اگر از طرفین لگاریتم در پایه ۶ بگیریم، آن‌گاه داریم:

$$4^{1-x}=3^{1+2x}\Rightarrow 2^{2-2x}=3^{1+2x}\Rightarrow \log_{6}^{2^{2-2x}}=\log_{6}^{3^{1+2x}}\Rightarrow (2-2x)\log_{6}^{2}=(1+2x)\log_{6}^{3}$$

$$\Rightarrow 2\log_{6}^{2}-\log_{6}^{3}=x(2\log_{6}^{2}+2\log_{6}^{3})\Rightarrow \log_{6}^{\frac{4}{3}}=x.\underbrace{\log_{6}^{36}}_{2}\Rightarrow 2x=\log_{6}^{\frac{4}{3}}\Rightarrow x=\log_{6}^{\sqrt{\frac{4}{3}}}\Rightarrow \alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

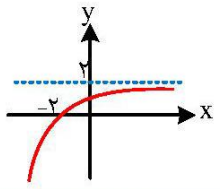
سوالات منتخب:

جمع ریشه‌های معادله $\log_{2}^{4^x+15}=x+3$ کدام است؟

۱) $\log_{16}^{15}$ ۲) $\log_{8}^{15}$ ۳) $\log_{2}^{15}$ ✓ ۴) $\log_{4}^{15}$

گروه آموزشی ماز

- نمودار تابع $f(x)=a+b2^{1-x}$ به شکل مقابل است. ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ کدام است؟



۱) $y=-1+\log_{2}^{(2-x)}$

۲) $y=1+\log_{2}^{(x-2)}$

۳) $y=-1-\log_{2}^{(2-x)}$

۴) $y=1-\log_{2}^{(x-2)}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ متوسط)

نکته درسی)

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=\begin{cases}+\infty & a>1\\ 0 & 0<a<1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(a+b\times\frac{2}{2^x}\right)=a$$

$$f(-2)=0\Rightarrow 2+b\times 2^3=0$$

پس $a=2$، از طرفی:

$$8b=-2\Rightarrow b=-\frac{1}{4}\Rightarrow f(x)=2-\frac{1}{4}\times 2^{1-x}\Rightarrow f(x)=2-2^{-1-x}$$

برای یافتن وارون این تابع داریم:

$$y=2-2^{-1-x}\Rightarrow 2^{-1-x}=2-y\Rightarrow (-1-x)=\log_{2}^{(2-y)}$$

$$x=-1-\log_{2}^{(2-y)}\Rightarrow f^{-1}(x)=-1-\log_{2}^{(2-x)}$$

- تابع $f(x)=\sqrt[3]{2^{ax+b}}$ از نقطه $(\frac{1}{2},1)$ عبور می‌کند. اگر $f^{-1}(8)=5$ باشد، حاصل $a-b$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ فصل ۵)

نکته:

اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد: $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم که تابع f از نقطه $(\frac{1}{2},1)$ عبور می‌کند، پس $f(\frac{1}{2})=1$ است:

$$f(x)=\sqrt[3]{2^{ax+b}} \xrightarrow{f(\frac{1}{2})=1} \sqrt[3]{2^{\frac{a}{2}+b}}=1 \Rightarrow 2^{\frac{a}{2}+b}=1 \Rightarrow 2^{\frac{a}{2}+b}=2^0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2}+b=0 \Rightarrow a+2b=0 \Rightarrow a=-2b$$

از طرفی می‌دانیم که $f^{-1}(8)=5$ است، پس طبق نکته می‌توان نتیجه گرفت که $f(5)=8$ است:

$$\sqrt[3]{2^{5a+b}}=8 \Rightarrow 2^{5a+b}=(8)^3 \Rightarrow 2^{5a+b}=2^9 \Rightarrow 5a+b=9$$

می‌دانیم که $a=-2b$ است، پس:

$$\begin{cases} 5a+b=9 \xrightarrow{a=-2b} 5(-2b)+b=9 \Rightarrow -10b+b=9 \Rightarrow b=-1 \\ a=-2b \xrightarrow{b=-1} a=2 \end{cases}$$

با داشتن $a=2$ و $b=-1$، حاصل $a-b$ برابر است با: $a-b=2-(-1)=3$

گروه آموزشی ماز

- دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log_4(|x^2-2|-x)$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(2,+\infty)$ ۲) $(-\infty,1)\cup(\sqrt{2},+\infty)$

۳) $[-1,1)\cup(\sqrt{2},+\infty)$ ۴) $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۲ ـ فصل ۵)

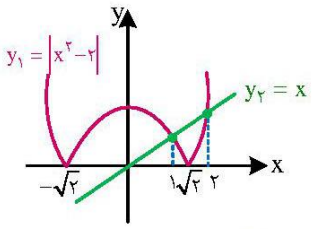
روش اول) بهترین تکنیک در این مواقع، عددگذاری و استفاده از گزینه‌هاست:

$1)\ x=-1: f(-1)=\log_4\left(\left|(-1)^2-2\right|-(-1)\right)=\log_4^2=\frac{1}{2} \Rightarrow$ رد گزینه ۱

$2)\ x=2: f(2)=\log_4\left(\left|2^2-2\right|-2\right)=\log_4^0 \Rightarrow$ رد گزینه‌های ۲ و ۳

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

روش دوم) می‌دانیم که در $y=\log_{g(x)}^{f(x)}$، $f(x)>0$، $g(x)>0$ و $g(x)\neq 1$ است بنابراین با توجه به ضابطه تابع باید $|x^2-2|-x>0$ باشد، یعنی $|x^2-2|>x$ باشد، در واقع باید بدانیم که در چه محدوده‌ای نمودار تابع $y_1=|x^2-2|$ بالاتر از نمودار تابع $y_2=x$ قرار می‌گیرد. حال با رسم نمودار توابع $y_1=|x^2-2|$ و $y_2=x$ و یافتن طول نقاط تلاقی دو نمودار، داریم:



یافتن طول نقاط تلاقی: $|x^2-2|=x \Rightarrow \begin{cases} x^2-2=x \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x=-1, x=2 \\ x^2-2=-x \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x=-2, x=1 \end{cases}$

در نهایت با توجه به نمودار، مجموعه جواب مطلوب برابر $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ است.

- اگر $\log_{۲}^{۳}=a$ و $\log_{۸}^{b}=\frac{۲}{۳}(۱+a)$ باشد، مقدار $\log(۳b-۸)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ فصل ۵)

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم که $\log_{۸}^{b}=\frac{۲}{۳}(۱+a)$ و $a=\log_{۲}^{۳}$ است، پس:

$$\log_{۸}^{b}=\frac{۲}{۳}(۱+a)\xrightarrow{a=\log_{۲}^{۳}}\log_{۸}^{b}=\frac{۲}{۳}(۱+\log_{۲}^{۳})\Rightarrow\log_{۸}^{b}=\frac{۲}{۳}(\log_{۲}^{۲}+\log_{۲}^{۳})$$

حال به کمک رابطه $\log_{b}^{ac}=\log_{b}^{a}+\log_{b}^{c}$ داریم:

$$\log_{۸}^{b}=\frac{۲}{۳}\log_{۲}^{۶}$$

از طرفی می‌دانیم که $\log_{b^n}^{a^m}=\frac{m}{n}\log_{b}^{a}$ است، پس:

$$\log_{۸}^{b}=\log_{۲^۳}^{۶^۲}\Rightarrow\log_{۸}^{b}=\log_{۸}^{۳۶}\Rightarrow b=۳۶$$

حال به سراغ خواسته سوال می‌رویم:

$$\log(۳b-۸)=\log\left((۳\times۳۶)-۸\right)=\log۱۰۰=۲$$

گروه آموزشی ماز

- اگر $(۰/۴)^{۲x-۱}=(\frac{۱۲۵}{۸})^{x^۲}$ باشد، $\log_{۸}^{(۹x+۱)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ فصل ۵)

نکته۱)

اگر $a>۰$ و $a\neq۱$ باشد، داریم: $a^{f(x)}=a^{g(x)}\Rightarrow f(x)=g(x)$

نکته۲)

$$(a,b>۰\ ,\ b\neq۱)\quad \log_{b^n}^{a^m}=\frac{m}{n}\log_{b}^{a}$$

نکته۳)

$$(\frac{a}{b})^m=\frac{a^m}{b^m}$$

ابتدا سعی می‌کنیم در معادله نمایی داده شده، پایه‌های طرفین تساوی را یکسان کنیم:

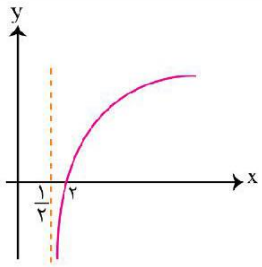
$$(۰/۴)^{۲x-۱}=(\frac{۵^۳}{۲^۳})^{x^۲}\Rightarrow(۰/۴)^{۲x-۱}=(\frac{۵}{۲})^{۳x^۲}\Rightarrow(۰/۴)^{۲x-۱}=(\frac{۲}{۵})^{-۳x^۲}\Rightarrow(۰/۴)^{۲x-۱}=(۰/۴)^{-۳x^۲}$$

$$\Rightarrow۲x-۱=-۳x^۲\Rightarrow۳x^۲+۲x-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۱\ \times\\ x=\frac{۱}{۳}\ \checkmark\end{cases}$$

می‌دانیم در $\log_{g(x)}^{f(x)}$، $f(x)>۰, g(x)>۰$ و $g(x)\neq۱$ است، و با توجه به اینکه عبارت جلوی لگاریتم نباید منفی باشد، لذا $x=-۱$ قابل قبول نیست.

$$\Rightarrow\log_{۸}(۹x+۱)\xrightarrow{x=\frac{۱}{۳}}\log_{۸}۴=\log_{۲^۳}۲^۲=\frac{۲}{۳}$$

- شکل زیر، نمودار تابع $y=-1+\log_b(2x+a)$ است. این منحنی خط $y=1$ را با کدام طول قطع می‌کند؟



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ فصل ۵)

نکته)

$$\log_b^a = c \Leftrightarrow a = b^c \qquad (a, b > 0, b \neq 1)$$

چون دامنه تابع به صورت $(\frac{1}{2}, +\infty)$ است، پس $x=\frac{1}{2}$ باید ریشه عبارت جلوی لگاریتم باشد. بنابراین:

$$x=\frac{1}{2} \Rightarrow 2(\frac{1}{2})+a=0 \Rightarrow a=-1$$

همچنین نمودار تابع از نقطهٔ $(2,0)$ عبور می‌کند، یعنی $f(2)=0$ است. پس:

$$f(2)=0 \Rightarrow -1+\log_b(2(2)-1)=0 \Rightarrow \log_b 3=1 \Rightarrow b=3$$

حال برای پیدا کردن محل برخورد منحنی با خط $y=1$، معادله $f(x)=1$ را حل می‌کنیم:

$$f(x)=1 \Rightarrow -1+\log(2x-1)=1 \Rightarrow \log(2x-1)=2 \Rightarrow 2x-1=9 \Rightarrow 2x=10 \Rightarrow x=5$$

- تابع $y=2^{x+|x|}$ را ۳ واحد در امتداد محور xها در جهت منفی و سپس در امتداد محور yها ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. منحنی حاصل، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $-\frac{5}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{7}{2}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ فصل ۵)

نکته)

اگر $a>0$ و $a\neq 1$ باشد: $a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x)$

تغییرات را به ترتیب بر روی تابع $y=2^{x+|x|}$ اعمال می‌کنیم:

- ۳ واحد در امتداد محور xها و در جهت منفی $(x \to x+3)$ $y=2^{(x+3)+|x+3|}$
- ۲ واحد در امتداد محور yها و در جهت منفی $(y \to y-2)$ $y=2^{(x+3)+|x+3|}-2$

سپس برای اینکه محل برخورد نمودار تابع حاصل با محور xها را بفهمیم، معادله $y=0$ را حل می‌کنیم:

$$y=0 \Rightarrow 2^{(x+3)+|x+3|}-2=0 \Rightarrow 2^{(x+3)+|x+3|}=2^1 \Rightarrow (x+3)+|x+3|=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+3+(x+3)=1 & x\geq -3 \\ x+3-(x+3)=1 & x\leq -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+6=1 \Rightarrow x=-\frac{5}{2} \xrightarrow{x\geq -3} \text{ok} \\ 0=1 \ \times \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

- اگر در معادلهٔ $2\log_x a+\log_a \sqrt{x}=2$، مقدار x برابر ۹ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۳ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ فصل ۵)

نکته۱)

با فرض با معنی بودن لگاریتم‌ها داریم:

$$\bullet \log_{b^n}^{a^m} = \frac{m}{n}\log_b^a$$

$$\bullet \log_b^a = \frac{۱}{\log_a^b}$$

نکته۲)

$$\log_a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = a^b \quad (\text{البته با شرط: } a \neq ۱ ,\ a, f(x) > ۰)$$

چون $x = ۹$ است، بنابراین در معادله داده شده به جای x، عدد ۹ را جایگذاری می‌کنیم:

$$۲\log_x^a + \log_a^{\sqrt{x}} = ۲ \xrightarrow{x=۹} ۲\log_۹^a + \log_a^{\sqrt{۹}} = ۲ \Rightarrow ۲\log_{۳^۲}^a + \log_a^۳ = ۲$$

طبق رابطه $\log_{b^n}^{a^m} = \frac{m}{n}\log_b^a$ داریم:

$$\frac{۲}{۲}\log_۳^a + \log_a^۳ = ۲ \Rightarrow \log_۳^a + \log_a^۳ = ۲$$

حال مطابق رابطه $\log_b^a = \frac{۱}{\log_a^b}$ داریم:

$$\log_۳^a + \log_a^۳ = ۲ \Rightarrow \log_۳^a + \frac{۱}{\log_۳^a} = ۲$$

در این مرحله $\log_۳^a$ را برابر t فرض کرده و داریم:

$$t + \frac{۱}{t} = ۲ \xrightarrow{\times t} t^۲ - ۲t + ۱ = ۰ \Rightarrow (t-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow t = ۱ \xrightarrow{t=\log_۳^a} \log_۳^a = ۱ \Rightarrow a = ۳$$

18- توابع $f(x)=3-2^{x+1}$ و $g(x)=\frac{5-2^{2x+1}}{3}$ درنقاطی به طول α و β متقاطع هستند. مقدار $f(\alpha)+g(\beta)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۲ ـ صفحهٔ ۱۰۳ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

ابتدا معادله $f(x)=g(x)$ را حل می‌کنیم: $2^x=A$

$$\frac{5-2^{2x+1}}{3}=3-2^{x+1}\Rightarrow\frac{5-2A^2}{3}=3-2A\Rightarrow 5-2A^2=9-6A\Rightarrow 2A^2-6A+4=0$$

$$\Rightarrow A^2-3A+2=0\begin{cases}A=1\to 2^x=1\to x=0\\A=2\to 2^x=2\to x=1\end{cases}$$

$$\alpha=0\quad A\Big|_1^0\quad f(\alpha)=g(\alpha)=1$$

$$\beta=1\quad B\Big|_{-1}^1\quad f(\beta)=g(\beta)=-1$$

$$\Rightarrow f(\alpha)+g(\beta)=0$$

دقت کنید که تفاوتی ندارد $\alpha=1$ و $\beta=0$ یا $\alpha=0$ و $\beta=1$!

19- اگر $\log_{ac}^{ab}=2$ و $\log_{b}^{ac}=3$، مقدار $\log_{c}^{b}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۲ ـ صفحهٔ ۱۱۰ و ۱۱۱ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$\log_{ac}^{ab}=2\Rightarrow ab=(ac)^2\Rightarrow ab=a^2c^2\ (I)$$

$$\log_{b}^{ac}=3\Rightarrow ac=b^3\Rightarrow a=\frac{b^3}{c}\ (II)$$

در تساوی (I) مقدار a را از رابطه (II) جایگزین می‌کنیم:

$$ab=a^2c^2\Rightarrow b=ac^2\Rightarrow b=\frac{b^3}{c}.c^2\Rightarrow b=b^3c\Rightarrow c=b^{-2}$$

حال به کمک رابطه فوق داریم:

$$\Rightarrow \log_c^b=\log_{b^{-2}}^b\ \Rightarrow\ \log_c^b=-\frac{1}{2}\log_b^b=-\frac{1}{2}$$

گروه آموزشی ماز

20- هرگاه $2\log\frac{x-y}{2}=\log x+\log y$، مقدار $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحهٔ ۱۱۲ و ۱۱۱ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

عبارت داده شده را ساده می‌کنیم و داریم:

$$2\log\frac{x-y}{2}=\log x+\log y\Rightarrow\log(\frac{x-y}{2})^2=\log xy\Rightarrow\frac{x^2+y^2-2xy}{4}=xy$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=6xy\Rightarrow\frac{x^2+y^2}{xy}=6\Rightarrow\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=6$$

گروه آموزشی ماز

21- هرگاه $27^{1-3x}=9\sqrt{3}$، مقدار لگاریتم $72x+4$ در کدام پایه برابر ۲ است؟

۱) $4\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) ۸ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحهٔ ۱۰۳و ۱۱۱ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$27^{1-3x}=9\sqrt{3}\Rightarrow 3^{3-9x}=3^{2/5}\Rightarrow 3-9x=2/5\Rightarrow 9x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow 72x+4=72\times\frac{1}{18}+4=8$$

پس: $72x+4=8$، لذا:

$$\log_{\alpha}^{(72x+4)}=2\Rightarrow \log_{\alpha}^{8}=2\Rightarrow \alpha^{2}=8$$

بنابراین: $\alpha=2\sqrt{2}$

گروه آموزشی ماز

22- به ازای کدام مقدار a، عدد $x=3$ در معادله $1+\log_a^{(x-1)}=\log_a^{(3x+7)}$ صدق می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۲ ـ صفحهٔ ۱۱۲ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

چون $x=3$ در معادله صدق می‌کند. پس:

$$1+\log_a^{2}=\log_a^{16}\Rightarrow \log_a^{16}-\log_a^{2}=1\Rightarrow \log_a^{8}=1\Rightarrow a=8$$

گروه آموزشی ماز

23- هرگاه لگاریتم $2\sqrt[3]{16}$ در پایه $4\sqrt{2}$ برابر a باشد، لگاریتم $15a+2$ در پایه $\sqrt[4]{2}$ چه عددی است؟

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) $4\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحهٔ ۱۱۲ و ۱۱۱ ـ متوسط)

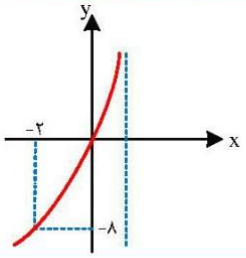
پاسخ تشریحی:

$$a=\log_{4\sqrt{2}}^{2\sqrt[3]{16}}\Rightarrow a=\log_{2^{\frac{5}{2}}}^{2\times 2^{\frac{4}{3}}}\Rightarrow a=\log_{2^{\frac{5}{2}}}^{2^{\frac{7}{3}}}\Rightarrow a=\frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{2}}\log_2^{2}=\frac{14}{15}\Rightarrow 15a=14\Rightarrow 15a+2=16$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt[4]{2}}^{15a+2}=\log_{2^{\frac{1}{4}}}^{16}=\log_{2^{\frac{1}{4}}}^{2^{4}}=16$$

گروه آموزشی ماز

24- نمودار تابع $f(x)=a-a\log_2^{(b-3x)}$ شکل روبه‌رو است. مقدار $\log_a^{(b+2)}$ چه عددی است؟



۱) ۱

۲) -1

۳) $-\frac{1}{2}$

۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحهٔ ۱۱۵ و ۱۱٦ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

اولاً: $f(0)=0$ زیرا تابع از مبدأ مختصات عبور کرده است:

$$f(0)=a-a\log_2^{b}\Rightarrow 0=a(1-\log_2^{b})\Rightarrow \log_2^{b}=1\Rightarrow b=2$$

ثانیا: از طرفی $f(-2)=-8$، پس:

$$-8=a-a\log_2^{(2+6)}\Rightarrow -8=a-3a\Rightarrow -2a=-8\Rightarrow a=4\ ,\ b=2$$

$$\log_a^{(b+2)}=\log_4^{4}=1$$

گروه آموزشی ماز

25- اگر α جواب معادله $\log_{۳}^{x}+\log_{۱۲}^{x}=۲(\log_{۳}^{x})(\log_{۱۲}^{x})$ باشد، مقدار $\log_{۲}^{(۲\alpha+۴)}$ چه عددی است؟ $(\log x\neq ۰)$

۱) ۱ ۲) ۸ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۲ ـ صفحهٔ ۱۱۲ تا ۱۱٤ـ دشوار)

نکته:

یکی از ویژگی‌های لگاریتم به صورت $\log_{\beta}^{\alpha}=\frac{\log\alpha}{\log\beta}$ است.

پاسخ تشریحی:

$\log_{۳}^{x}=\frac{\log x}{\log ۳}$ و $\log_{۱۲}^{x}=\frac{\log x}{\log ۱۲}$

پس: $\frac{\log x}{\log ۳}+\frac{\log x}{\log ۱۲}=۲\frac{\log x}{\log ۳}\times\frac{\log x}{\log ۱۲}\Rightarrow \log x(\frac{\log ۳+\log ۱۲}{\log ۳\log ۱۲})=۲\log x(\frac{\log x}{\log ۳\log ۱۲})$

اولاً: می‌دانیم $\log x\neq ۰$ است پس می‌توانیم $\log x$ را حذف کنیم و داریم:

ثانیاً: $\log ۳+\log ۱۲=۲\log x\Rightarrow \log ۳۶=\log x^{۲}\Rightarrow x^{۲}=۳۶\Rightarrow \begin{cases} x=۶ \\ x=-۶ \text{ غ ق ق} \end{cases}\Rightarrow \alpha=۶\Rightarrow \log_{۲}^{(۲\alpha+۴)}=\log_{۲}^{۱۶}=۴$

گروه آموزشی ماز

26- هرگاه $f(x)=\log_{۲}^{(۸-۲^{x})}$ به طوری که $f^{-۱}(x)=\log_{۲}^{(a-b^{x})}$، مقدار ab کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحهٔ ۱۱۵ و ۱۱٦ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$f(x)=\log_{۲}^{(۸-۲^{x})}\Rightarrow ۲^{y}=۸-۲^{x}\Rightarrow ۲^{x}+۲^{y}=۸$

دقت کنید اگر جای x و y عوض شود ضابطه فرق نمی‌کند، پس: $f^{-۱}(x)=f(x)$.

پس با مقایسه ضابطه f و $f^{-۱}$ داریم $a=۸, b=۲$. پس: $ab=۱۶$

گروه آموزشی ماز

27- ۲۴ گرم از عنصری در اختیار داریم، به طوری که هر ۱۵ روز $\frac{۱}{۲۰}$ جرم باقی مانده را از دست می‌دهد. پس از طی تقریباً چند روز فقط ۶ گرم از عنصر باقی خواهد ماند؟ $(\log ۱۹=۱/۲۷۸ , \log ۲=۰/۳)$

۱) ۴۳۰ ۲) ۱۸۹ ۳) ۴۰۹ ۴) ۲۰۷

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحهٔ ۱۱۷ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

چون هر ۱۵ روز یک‌بار $\frac{۱}{۲۰}$ جرم از دست می‌رود پس مقدار باقی مانده جرم $f(t)=۲۴(\frac{۹۵}{۱۰۰})^{\frac{t}{۱۵}}$

زیرا $\frac{۱}{۲۰}$ را از دست می‌دهد. پس $\frac{۹۵}{۱۰۰}$ از جرم آن باقی می‌ماند.

$۶=۲۴(\frac{۱۹}{۲۰})^{\frac{t}{۱۵}}\Rightarrow(\frac{۱۹}{۲۰})^{\frac{t}{۱۵}}=\frac{۱}{۴}$

$\log(\frac{۱۹}{۲۰})^{\frac{t}{۱۵}}=\log\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{t}{۱۵}(\log ۱۹-\log ۲۰)=-۲\log ۲$

$\frac{t}{۱۵}(۱/۲۷۸-۱-\log ۲)=-۲\log ۲\Rightarrow\frac{t}{۱۵}(۰/۲۷۸-۰/۳)=-۰/۶\Rightarrow t\simeq ۴۰۹$

حدوداً ۴۰۹ روز طول می‌کشد.

گروه آموزشی ماز

28- اگر $۶\log a = ۴\log b = ۳\log c$ باشد، مقدار $\log_{ab}^{c}$ کدام است؟ (تمامی لگاریتم‌ها تعریف شده هستند)

۱)　　۲)　　۳)　　۴)

پاسخ: گزینه ٤　　(ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۱۱ تا ۱۱۳ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

به کمک ویژگی‌های لگاریتم، داریم:

$$۶\log a = ۳\log c \Rightarrow \frac{\log a}{\log c} = \frac{۳}{۶} \Rightarrow \log_c^a = \frac{۱}{۲}$$

$$۴\log b = ۳\log c \Rightarrow \frac{\log b}{\log c} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \log_c^b = \frac{۳}{۴}$$

بنابراین داریم:

$$\log_c^a + \log_c^b = \frac{۵}{۴} \Rightarrow \log_c^{ab} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow \log_{ab}^c = \frac{۴}{۵}$$

گروه آموزشی ماز

29- جواب معادلهٔ $\log_x^{\left(\frac{۸-\log_۵^x}{\log_۵^x}\right)^{\log_۳^x}} = ۱$ چگونه است؟ $(x>۰)$

۱) عدد اول　　۲) مربع کامل　　۳) مضرب ۱۵　　۴) مضرب ۷

پاسخ: گزینه ۲　　(ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۱۱ تا ۱۱۳ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

ابتدا معادله را ساده می‌کنیم و داریم:

$$\log_x^{\left(\frac{۸-\log_۵^x}{\log_۵^x}\right)^{\log_۳^x}} = ۱ \Rightarrow \left(\frac{۸-\log_۵^x}{\log_۵^x}\right)^{\log_۳^x} = x \Rightarrow \frac{۸-\log_۵^x}{\log_۵^x} = ۳$$

$$\Rightarrow ۳\log_۵^x = ۸ - \log_۵^x \Rightarrow ۴\log_۵^x = ۸ \Rightarrow \log_۵^x = ۲ \Rightarrow x = ۵^۲ = ۲۵$$

بنابراین جواب معادله، عدد مربع کامل است.

گروه آموزشی ماز

30- اگر مجموع جواب‌های معادلهٔ $a^x+27a^{-x}-12=0$ برابر -3 باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۰۳ و ۱۱۲ و ۱۱۳ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

فرض می‌کنیم $a^x=t$ باشد، پس:

$$a^x+27a^{-x}-12=0 \Rightarrow t+\frac{27}{t}-12=0 \Rightarrow t^2-12t+27=0 \Rightarrow t=9, t=3$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} a^x=9 \to x=\log_a^9 \\ a^x=3 \to x=\log_a^3 \end{cases} \Rightarrow \log_a^9+\log_a^3=-3 \Rightarrow \log_a^{27}=-3 \Rightarrow a^{-3}=27 \Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

گروه آموزشی ماز

31- اگر $\log_{24}^3=a$ و $\log_{24}^4=b$ باشد، حاصل $\log_{24}^8$ کدام است؟

۱) $3+3a-3b$ ۲) $3(2-a-b)$

۳) $3+a+b$ ۴) $3-3a-3b$

پاسخ : گزینه ٤ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۱۱ و ۱۱۲ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

به کمک ویژگی‌های لگاریتم داریم:

$$\log_{24}^3+\log_{24}^4=a+b \Rightarrow \log_{24}^{12}=a+b \Rightarrow \log_{24}^{24}-\log_{24}^2=a+b \Rightarrow \log_{24}^2=1-a-b$$

حال حاصل $\log_{24}^8$ برابر است با:

$$\log_{24}^8=3\log_{24}^2=3(1-a-b)=3-3a-3b$$

گروه آموزشی ماز

32- از تساوی $12^{x-1}=3^{x+1}$ مقدار $6^{\frac{1}{x}}+2^{1-x}$ کدام است؟

۱) ۲) ۳) ۴) $\frac{10}{3}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۰۳ و ۱۱۱ تا ۱۱۳ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

ابتدا مقدار x را به دست می‌آوریم:

$$12^{x-1}=3^{x+1} \Rightarrow 3^{x-1}\times 4^{x-1}=3^{x+1} \Rightarrow 4^{x-1}=9 \Rightarrow 4^x=36 \Rightarrow x=\log_4^{36}=\log_2^6$$

حال داریم:

$$6^{\frac{1}{x}}+2^{1-x}=6^{\log_6^2}+2^{1-\log_2^6}=2^{\log_6^6}+\frac{2}{2^{\log_2^6}}=2+\frac{2}{6^{\log_2^2}}=2+\frac{2}{6}=\frac{7}{3}$$

گروه آموزشی ماز

33- اگر $\log ۳=a$ و $\log ۷=b$ باشد، جواب معادلهٔ $۷^x=۳^{x+۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲a}{b+a}$ ۲) $\frac{۲a}{b-a}$ ۳) $\frac{۴a}{b+a}$ ۴) $\frac{۴a}{b-a}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۰۳ و ۱۱۱ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

از معادلهٔ $۷^x=۳^{x+۲}$ داریم:

$$۷^x=۳^۲\times ۳^x \Rightarrow (\frac{۷}{۳})^x=۹ \Rightarrow x\log\frac{۷}{۳}=\log ۹$$

$$\Rightarrow x\left(\log ۷-\log ۳\right)=۲\log ۳ \Rightarrow x(b-a)=۲a \Rightarrow x=\frac{۲a}{b-a}$$

گروه آموزشی ماز

34- اگر $\log_۶^۵=a$ و $\log_۳^۲=b$ باشند، مقدار $\log_۳^۵$ کدام است؟

۱) $a+۲ab$ ۲) $b+۲ab$ ۳) $b+ab$ ۴) $a+ab$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۱۱ تا ۱۱۳ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$\log_۳^۲=b \Rightarrow ۱+\log_۳^۲=۱+b \Rightarrow \log_۳^۳+\log_۳^۲=۱+b \Rightarrow \log_۳^۶=۱+b$$

از طرفی: $\log_۶^۵\times\log_۳^۶=\log_۳^۵ \Rightarrow \log_۳^۵=a(۱+b)=a+ab$

گروه آموزشی ماز

35- حاصل عبارت $\frac{۱}{\log_{(\sqrt{۳}-۱)}^۴}+\frac{۱}{\log_{(\sqrt{۳}+۱)}^۴}$ کدام است؟

۱) ۲) ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۰۹ تا ۱۱۲ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

با توجه به ویژگی‌های لگاریتم داریم:

$$\frac{۱}{\log_{(\sqrt{۳}-۱)}^۴}+\frac{۱}{\log_{(\sqrt{۳}+۱)}^۴}=\log_۴^{(\sqrt{۳}-۱)}+\log_۴^{(\sqrt{۳}+۱)}=\log_۴^{(\sqrt{۳}-۱)(\sqrt{۳}+۱)}=\log_۴^{(۳-۱)}=\log_۴^۲=\frac{۱}{۲}$$

گروه آموزشی ماز

شرکت تعاونی خدمات آموزشی کارکنان
سازمان سنجش آموزش کشور

www.mapedu.ir

. **گزینه ۲ درست است.**

الف) $y = x^x$ تابع نمایی نیست، چون پایه آن می‌بایست ثابت باشد.

ب) $x^{\log_x^{x+۲}} = x+۲ = ۱ \Rightarrow x = -۱ \notin D_{\log_x^{x+۲}}$ غ ق ق

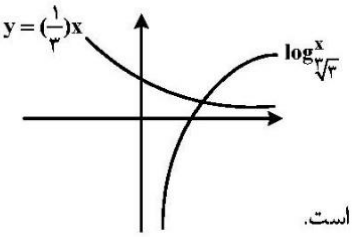
پس جمله درست است.

ج) $y = ۸^x = (۲^۳)^x$ و با توجه به اینکه $\left(۲^۳\right)^x \neq ۲^{۳^x}$، پس نادرست است.

د) در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.

$$x^۳ = ۳^y \Rightarrow y = \log_۳^{x^۳} = \frac{۱}{\frac{۱}{۳}}\log_۳^x = \log_{\sqrt[۳]{۳}}^x \quad , \quad \sqrt[۳]{۳} > ۱$$

$$y = ۳^{-x} = (\frac{۱}{۳})^x$$



پس نادرست است.

. **گزینه ۳ درست است.**

اگر M بزرگی زلزله بر حسب ریشتر و E انرژی آزاد شده در واحد ارگ باشد رابطه $\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$ بر قرار است.

الف درست است. $M = ۷/۲ \Rightarrow \log E = ۱۱/۸ + ۱/۵ \times ۷/۲ = ۱۱/۸ + ۱۰/۸ = ۲۲/۶ \Rightarrow E = ۱۰^{۲۲/۶}$

ب نادرست است. $E = ۱۰^{۲۱/۷} \Rightarrow \log E = ۲۱/۷ = ۱۱/۸ + ۱/۵M \Rightarrow M = ۶/۶$

اگر نرخ رشد در واحد زمان، A مقدار اولیه، A_t مقدار بعد از t دوره زمانی باشد، رابطه $A_t = A_۰ = (۱+r)^t$ برقرار است.

$$A_t = A_۰ = (۱+۰/۰۱)^t = A_۰(۱/۰۱)^t$$

ج نادرست است.

. **گزینه ۲ درست است.**

$\log_x(۶x+۲۷) = ۲ \Rightarrow x^۲ = ۶x + ۲۷ \Rightarrow x = ۹$ ریشه مثبت قبول است.

پس $\log_۴(x-۱) = \log_۴ ۸ = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$

. **گزینه ۳ درست است.**

از طرفین تساوی لگاریتم در پایه ۵ می‌گیریم

$$(\log_۵ x - ۱)\log_۵ \sqrt{x} = ۱ \Rightarrow (\log_۵ x)^۲ - (\log_۵ x) - ۲ = ۰ \Rightarrow \log_۵ x = -۱, ۲$$

در نتیجه $x = ۰/۲$, $x = ۲۵$ و تفاضل ریشه‌ها برابر ۲۴/۸ است.

. **گزینه ۴ درست است.**

$$\sqrt{۷} = x^{-\frac{۱}{۲}} \Rightarrow x = (\sqrt{۷})^{-۲} = \frac{۱}{۷} \Rightarrow ۱ + \frac{۱}{x} = ۸ = ۲^۳$$

پس $\log_۲(۱+\frac{۱}{x}) = ۳$

گزینه ۱ درست است.

$$1=\log_5^{(x-2)^3}-\log_5^{(x-2)}\Rightarrow \log_5^{(x-2)}=\frac{1}{2}$$

گزینه ۴ درست است.

$$a=\frac{\log_5^{75}}{\log_5^{45}}=\frac{2+\log_5^3}{1+2\log_5^3}\Rightarrow \log_5^3=\frac{2-a}{2a-1}=x$$

$$\log_{75}^{15}=\frac{\log_5^{15}}{\log_5^{75}}=\frac{1+x}{2+x}=\frac{2a-1+2-a}{4a-2+2-a}=\frac{a+1}{3a}$$

گزینه ۴ درست است.

$$6^a=3\Rightarrow 6^{a-1}=2^{-1}\Rightarrow \frac{1}{6}=\sqrt[a-1]{2}$$

گزینه ۳ درست است.

$$3^5<500<3^6\rightarrow 5<\log_3^{500}<6\rightarrow [\log_3^{500}]=5$$

$$[\frac{1}{5-\sqrt{24}}]=[\frac{1}{5-\sqrt{24}}\times\frac{5+\sqrt{24}}{5+\sqrt{24}}]=[5+\sqrt{24}]=9$$

$$4<\underset{\downarrow +5}{\sqrt{24}}<5$$

$$9<5+\sqrt{24}<10\Rightarrow [5+\sqrt{24}]=9$$

حاصل نهایی $=9+5=14$

. گزینه ۲ درست است.

چون دامنه تابع $x>\frac{1}{3}$ است پس $a=-1$ می باشد. از طرفی محل برخورد با محور x ها در $x=2$ $(y=0)$ است:

$$0=1-\log_b^{(3(2)-1)}\rightarrow \log_b^5=1\rightarrow b=5$$

حال تابع $y=1-\log_5^{(3x-1)}$ را با $y=-2$ قطع می‌دهیم:

$$1-\log_5^{(3x-1)}=-2\rightarrow \log_5^{(3x-1)}=3$$

$$3x-1=5^3\rightarrow 3x-1=125\rightarrow 3x=126 \qquad \boxed{x=42}$$

. گزینه ۳ درست است.

مطابق الگوی زیر:

$$۱ \le \text{عدد طبیعی یک رقمی } N < ۱۰ \xrightarrow{۰ \le \log_{۱۰} N < ۱} ۱ = \left[\log_{۱۰} N\right] + ۱$$

$$۱۰ \le \text{عدد طبیعی دو رقمی } N < ۱۰۰ \xrightarrow{۱ \le \log_{۱۰} N < ۲} ۲ = \left[\log_{۱۰} N\right] + ۱$$

$$۱۰۰ \le \text{عدد طبیعی سه رقمی } N < ۱۰۰۰ \xrightarrow{۲ \le \log_{۱۰} N < ۳} ۳ = \left[\log_{۱۰} N\right] + ۱$$

$$۱۰^{n-۱} \le \text{عدد طبیعی n رقمی } N < ۱۰^{n} \xrightarrow{n-۱ \le \log_{۱۰} N < n} n = \text{تعداد رقم‌ها} = \left[\log_{۱۰} N\right] + ۱$$

کروشه علامت جزء صحیح است، بنابراین:

$$\log_{۱۰} ۷^{۱۰۰} = ۱۰۰ \log_{۱۰} ۷ = ۱۰۰ \times ۰/۸۴۵۱ = ۸۴/۵۱$$

$$\text{تعداد رقم‌ها} = \left[۸۴/۵۱\right] + ۱ = ۸۴ + ۱ = ۸۵$$

. گزینه ۴ درست است.

$$\log \frac{x^۲ - ۱}{۲x + ۲} = ۱ - \log x = \log \frac{۱۰}{x} \Rightarrow x^۳ - x = ۲۰x + ۲۰$$

$$\Rightarrow x^۳ - ۲۱x - ۲۰ = ۰ \Rightarrow (x - ۵)(x^۲ + ۵x + ۴) = ۰ \Rightarrow x = ۵$$

$$\Rightarrow \log_{۲} ۶x + ۲ = ۵$$

. گزینه ۱ درست است.

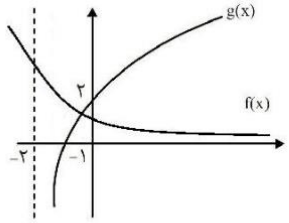
$$b + ۱ = \log_{۲}^{۵} + \log_{۲}^{۲} = \log_{۲}^{۱۰} \Rightarrow \log ۲ = \frac{۱}{b + ۱}$$

$$\sqrt{۰/۲۲۵} = \sqrt{\frac{۱۵^۲}{۱۰۰۰}} = \frac{۱۵}{۱۰\sqrt{۱۰}} = \frac{۳}{۲\sqrt{۱۰}} \Rightarrow \log ۳ - \log ۲ - \frac{۱}{۲} = a - \frac{۱}{b + ۱} - \frac{۱}{۲}$$

$$= \frac{۲ab + ۲a - ۲ - b - ۱}{۲b + ۲} = \frac{۲ab + ۲a - b - ۳}{۲b + ۲}$$

گزینه ۲ درست است.

با رسم $f(x) = ۲^{-x}$ و $g(x) = ۲ + \log_{۲}^{x+۱}$، یک نقطه برخورد منفی، پس یک ریشه دارد.



. **گزینه ۳ درست است.**

نمودار تابع $f(x)$ از نقطهٔ $(-۳\ ,\ ۳)$ می‌گذرد، پس:

$$-۳=\log_{۲}^{(\frac{۱}{۳a+b})}\Rightarrow\frac{۱}{۳a+b}=\frac{۱}{۸}\Rightarrow ۳a+b=۸\qquad(۱)$$

از طرفی دامنهٔ تابع $x>\frac{۱}{۳}$ است، پس:

$$\frac{۱}{ax+b}>\circ\Rightarrow ax+b>\circ\Rightarrow x>-\frac{b}{a}\Rightarrow-\frac{b}{a}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow a=-۳b\qquad(۲)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم:

$$۳(-۳b)+b=۸\Rightarrow-۸b=۸\Rightarrow b=-۱\Rightarrow a=۳$$

بنابراین $f(x)=\log_{۲}^{\frac{۱}{۳x-۱}}$ می‌باشد. با فرض $f^{-۱}(-۵)=m$ داریم:

$$f(m)=-۵\Rightarrow\log_{۲}^{\frac{۱}{۳m-۱}}=-۵\Rightarrow\frac{۱}{۳m-۱}=۲^{-۵}\Rightarrow ۳m-۱=۳۲\Rightarrow m=۱۱$$

. **گزینه ۲ درست است.**

$$\log_{۱۸}^{۴۵}=\frac{\log_{۶}^{۴۵}}{\log_{۶}^{۱۸}}=\frac{\log_{۶}^{۹}+\log_{۶}^{۵}}{\log_{۶}^{۳}+۱}=\frac{۲\log_{۶}^{۳}+a}{\log_{۶}^{۳}+۱}$$

$$\log_{۳}^{۲}=b\Rightarrow\frac{\log_{۶}^{۲}}{\log_{۶}^{۳}}=b\Rightarrow\frac{\log_{۶}^{\frac{۶}{۳}}}{\log_{۶}^{۳}}=b\Rightarrow\frac{۱-\log_{۶}^{۳}}{\log_{۶}^{۳}}=b\Rightarrow\log_{۶}^{۳}=\frac{۱}{۱+b}$$

$$\log_{۱۸}^{۴۵}=\frac{۲(\frac{۱}{۱+b})+a}{\frac{۱}{۱+b}+۱}=\frac{\frac{۲+a+ab}{۱+b}}{\frac{۱+۱+b}{۱+b}}=\frac{۲+a+ab}{۲+b}$$

گزینه ۳ درست است.

طول نقطهٔ تلاقی $f(x)$ با محور xها را می‌یابیم:

$$a=\log_{۳}^{(\frac{x}{۲})}\Rightarrow\frac{x}{۲}=۱\Rightarrow x=۲$$

بنابراین عرض نقطهٔ تلاقی $f^{-۱}(x)$ با محور yها برابر ۲ است. حال طول نقطهٔ B را می‌یابیم:

$$۲=\log_{۳}^{(\frac{x}{۲})}\Rightarrow\frac{x}{۲}=۹\Rightarrow x=۱۸$$

پس طول مستطیل برابر ۱۸ و عرض آن برابر ۲ است و داریم:

$$S=۱۸\times۲=۳۶$$

گزینه ۲ درست است.

ابتدا مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(a)=۱۲ \Rightarrow ۲^a=۱۲ \Rightarrow \log_۲^{۲^a}=\log_۲^{۱۲} \Rightarrow a=\log_۲^{۱۲} \\ g(b)=۳۶ \Rightarrow ۳^b=۳۶ \Rightarrow \log_۳^{۳^b}=\log_۳^{۳۶} \Rightarrow b=\log_۳^{۳۶} \end{cases}$$

حال حاصل $(a-۲)(b-۲)$ برابر است با:

$$(a-۲)(b-۲)=(\log_۲^{۱۲}-۲)(\log_۳^{۳۶}-۲)=(\log_۲^{۱۲}-\log_۲^{۴})(\log_۳^{۳۶}-\log_۳^{۹})$$
$$=\log_۲^{۳}\times\log_۳^{۴}=\log_۲^{۴}=۲$$

گزینه ۲ درست است.

$$\log_۳^x=t \Rightarrow ۳t+\frac{۱}{t}-۴=۰ \Rightarrow ۳t^۲-۴t+۱=۰ \Rightarrow t=\frac{۱}{۳}, t=۱$$

$$\begin{cases} \log_۳^x=۱ \Rightarrow x=۳ \\ \log_۳^x=\frac{۱}{۳} \Rightarrow x=\sqrt[۳]{۳} \end{cases} \Rightarrow m=\frac{۳}{\sqrt[۳]{۳}}=\sqrt[۳]{۳^۲}$$

حال حاصل $\log_{\sqrt{۳}}^m$ را به دست می‌آوریم:

$$\log_{\sqrt{۳}}^m=\log_{۳^{\frac{۱}{۲}}}^{۳^{\frac{۲}{۳}}}=\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۱}{۲}}\log_۳^۳=\frac{۴}{۳}$$

گزینه ۳ درست است.

$$۲^{۱+\log_۳^۲}=۳۶^{\log_۳^x} \Rightarrow ۲^{\log_۳^۳+\log_۳^۲}=۳۶^{\log_۳^x} \Rightarrow ۲^{\log_۳^۶}=۶^{۲\log_۳^x} \Rightarrow ۲^{\log_۳^۶}=۶^{\log_۳^{x^۲}} \Rightarrow \log_۳^{۲^{\log_۳^۶}}=\log_۳^{۶^{\log_۳^{x^۲}}}$$

$$\Rightarrow \log_۳^۶\times\log_۳^۲=\log_۳^{x^۲}\times\log_۳^۶ \Rightarrow x^۲=۲ \Rightarrow x=\sqrt{۲} \Rightarrow a=\sqrt{۲}$$

حال حاصل $\log_۴^{a^۳}$ به ازای $a=\sqrt{۲}$ برابر است با:

$$\log_۴^{(\sqrt{۲})^۳}=\log_{۲^۲}^{۲^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{۳}{۴}$$

البته می‌توانستیم در تساوی $۲^{\log_۳^۶}=۶^{\log_۳^{x^۲}}$ از ویژگی $a^{\log_c^b}=b^{\log_c^a}$ نیز استفاده کنیم و به $x^۲=۲$ برسیم.

گزینه ۴ درست است.

باتوجه به این که $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=+\infty$ می‌باشد. پس دامنهٔ تابع $(۲,+\infty)$ است. پس:

$$x+b>۰ \to x>-b \Rightarrow -b=۲ \Rightarrow b=-۲$$

از طرفی $f(x)$ از نقطهٔ $(\frac{۵}{۲},۲)$ می‌گذرد، پس:

$$۲=\log_a^{(\frac{۵}{۲}-۲)} \Rightarrow ۲=\log_a^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow a^۲=\frac{۱}{۲} \overset{a>۰}{\Rightarrow} a=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

بنابراین حاصل $\log_a^{(۲b+۶)}$ برابر است با:

$$\log_{\frac{۱}{\sqrt{۲}}}^{۲}=\log_{۲^{-\frac{۱}{۲}}}^{۲}=-۲\log_۲^۲=-۲$$

. گزینه ۴ درست است.

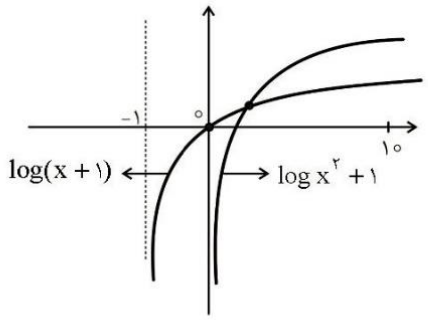
$$۴\times ۴^x - ۴^x - ۱۱(\frac{۴^x}{۴}) = (۲^۲)^{\sqrt{۲}-۱} = ۴^{\sqrt{۲}-۱}$$

$$\frac{۱۶\times ۴^x - ۴\times ۴^x - ۱۱\times ۴^x}{۴} = \frac{۴^x}{۴} = ۴^{\sqrt{۲}-۱} \Rightarrow ۴^x = ۴\times ۴^{\sqrt{۲}-۱} = \frac{۴\times ۴^{\sqrt{۲}}}{۴}$$

$$۴^x = ۴^{\sqrt{۲}} \Rightarrow x = \sqrt{۲}$$

$$۵^{x^۲+۱} + ۵^{x^۲} + ۵^{x^۲-۱} = ۵^۳ + ۵^۲ + ۵^۱ = ۱۵۵$$

. گزینه ۱ درست است.



$$f(x) = ۲\log x + ۱$$

$$y = ۱۰^x - ۱ \Rightarrow ۱۰^x = y + ۱$$

$$x = \log_{۱۰}^{y+۱} \Rightarrow g^{-۱}(x) = \log(x+۱)$$

گزینه ۴ درست است.

$$۲x - x^۲ > ۰ \Rightarrow x(۲-x) > ۰ \Rightarrow ۰ < x < ۲$$

$$\log_{\frac{۱}{۲}}^{۲x-x^۲} \geq ۰ \Rightarrow ۰ < ۲x - x^۲ \leq ۱$$

$$\begin{cases} ۲x - x^۲ - ۱ \leq ۰ \\ ۲x - x^۲ > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-۱)^۲ \geq ۰ \quad \text{همـــواره برقـــرار} \\ x(۲-x) > ۰ \rightarrow ۰ < x < ۲ \end{cases}$$

اشتراک جواب‌ها: $۰ < x < ۲$

. گزینه ۲ درست است.

نمودار تابع $y = a^x$ یک واحد به بالا حرکت کرده است.

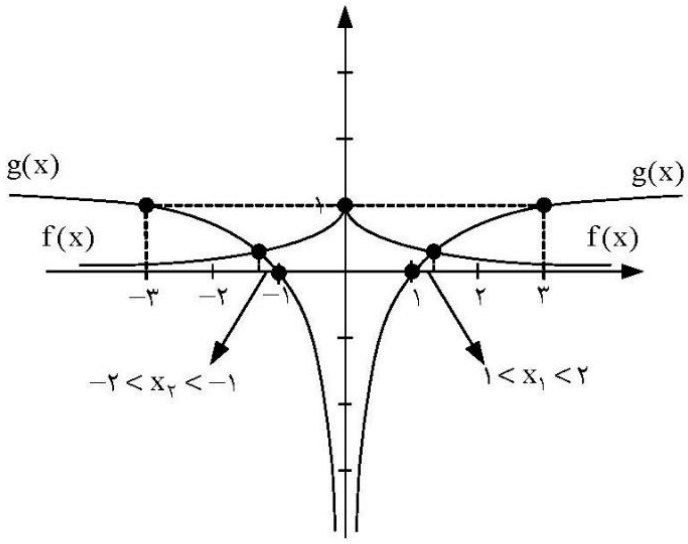
$$a - ۱ = ۱ \Rightarrow a = ۲$$

$$(۰,۲) \in f \Rightarrow ۲ = ۱ + ۲^{b-۰} \Rightarrow ۲^b = ۱ \Rightarrow b = ۰$$

$$a + b = ۲ + ۰ = ۲$$

. گزینه ۳ درست است.

نمودار دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. با توجه به شکل این معادله ۲ ریشه حقیقی دارد.



$$f(x) = ۳^{-|x|} = \begin{cases} ۳^{-x}; x \geq ۰ \\ ۳^{x}; x < ۰ \end{cases}$$

$$g(x) = \log_۳^{|x|} = \begin{cases} \log_۳^{x}; x > ۰ \\ \log_۳^{(-x)}; x < ۰ \end{cases}$$

گزینه ۱ درست است.

$$۳x + a > ۰ \xrightarrow{D_f = (\frac{۱}{۳}, +\infty)} \boxed{a = -۱}$$

$$(۲, ۰) \longrightarrow ۰ = ۱ - \log_b^{(۳(۲)-۱)} \rightarrow ۱ = \log_b^{۵} \rightarrow \boxed{b = ۵}$$

محل برخورد $\begin{cases} y = ۱ - \log_۵^{(۳x-۱)} \\ y = ۲ \end{cases} \rightarrow -۲ = ۱ - \log_۵^{(۳x-۱)}$

$$\log_۵^{(۳x-۱)} = ۳$$

$$۳x - ۱ = ۵^۳$$

$$۳x - ۱ = ۱۲۵$$

$$\boxed{x = ۴۲}$$

گزینه ۳ درست است.

$$۰ = ۲^{a(-\frac{۱}{۳})+b} - ۴ \rightarrow ۲^{\frac{-a}{۳}+b} = ۲^۲ \rightarrow \frac{-a}{۳} + b = ۲ \rightarrow \boxed{-a + ۳b = ۶}$$

$$-۲ = ۲^{a(۰)+b} - ۴ \rightarrow ۲ = ۲^b \rightarrow \boxed{b = ۱} \rightarrow \boxed{a = -۳}$$

$$f(x) = ۲^{-۳x+۱} - ۴ \rightarrow f(-\frac{۷}{۳}) = ۲^۸ - ۴ = ۲۵۲$$

۱. گزینه ۳ درست است.

از طرفین رابطه فرض، لگاریتم در پایه ۴ می‌گیریم:

$$\log_{۴} a^{۲} b^{۳} = \log_{۴} ۲۵۶ \Rightarrow \log_{۴} a^{۲} + \log_{۴} b^{۳} = ۴ \Rightarrow ۲\log_{۴} a + ۳\log_{۴} b = ۴$$

حالا عبارت حکم را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\log_{۴}^{a^{۳}} \times \log_{۴}^{b^{۲}} = (۳\log_{۴}^{a}) \times (۲\log_{۴}^{b}) = ۶\log_{۴}^{a} \times \log_{۴}^{b}$$

می‌خواهیم این عبارت ماکزیمم شود، به عبارتی می‌خواهیم $\log_{۴}^{a} \times \log_{۴}^{b}$ ماکزیمم شود، برای این منظور کافی است در عبارت فرض، عدد ۴ را به طور مساوی بین $\log_{۴}^{a}$, $\log_{۴}^{b}$ توزیع کنیم:

$$\begin{cases} ۲\log_{۴}^{a} = ۲ \Rightarrow \log_{۴}^{a} = ۱ \\ ۳\log_{۴}^{b} = ۲ \Rightarrow \log_{۴}^{b} = \frac{۲}{۳} \end{cases}$$

پس:

$$۶\log_{۴}^{a} \times \log_{۴}^{b} = ۶(۱)(\frac{۲}{۳}) = ۴$$

. گزینه ۱ درست است.

$$\log(۴^{x} + ۱) - \log ۲^{(x-۲)} = ۱$$

$$\log_{۱۰} \frac{۴^{x} + ۱}{۲^{x-۲}} = ۱ \rightarrow \frac{۴^{x} + ۱}{۲^{x-۲}} = ۱۰$$

$$(۲^{x})^{۲} + ۱ = (۲^{x} \times \frac{۱}{۴}) \times ۱۰ \xrightarrow{۲^{x}=t} t^{۲} + ۱ = \frac{۵}{۲} t$$

$$\rightarrow ۲t^{۲} - ۵t + ۲ = ۰ \begin{cases} t = ۲ \rightarrow ۲^{x} = ۲ \rightarrow \boxed{x_{۱} = ۱} \\ t = \frac{۱}{۲} \rightarrow ۲^{x} = ۲^{-۱} \rightarrow \boxed{x_{۲} = -۱} \end{cases}$$

گزینه ۴ درست است.

$$(-\frac{۱}{۳}, ۰) \xrightarrow{\text{جاگذاری}} ۰ = ۲^{a(-\frac{۱}{۳})+b} - ۴ \rightarrow ۲^{\frac{-a}{۳}+b} = ۲^{۲}$$

$$\frac{-a}{۳} + b = ۲ \rightarrow \boxed{-a + ۳b = ۶} \quad (۱)$$

$$(۰, -۲) \xrightarrow{\text{جاگذاری}} -۲ = ۲^{a(۰)+b} - ۴ \rightarrow -۲ = ۲^{b} - ۴$$

$$۲^{b} = ۲ \rightarrow \boxed{b = ۱} \xrightarrow{\text{طبق } (۱)} \boxed{a = -۳}$$

$$f(x) = ۲^{-۳x+۱} - ۴$$

$$f(-\frac{۸}{۳}) + f(\frac{۱}{۳}) = (۲^{۹} - ۴) + (۲^{۰} - ۴) = ۵۰۸ + (-۳) = ۵۰۵$$

۱. گزینه ۲ درست است.

$$۲^{\log_۳ ۳+\log_۳ ۲} = ۶^{۲\log_۳ x} \rightarrow ۲^{\log_۳ ۶} = ۶^{\log_۳ x^۲}$$

$$۶^{\log_۳ ۲} = ۶^{\log_۳ x^۲} \rightarrow x^۲ = ۲ \begin{cases} x = \sqrt{۲} = m \\ x = -\sqrt{۲} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\log_{\sqrt[۱۲]{۴}} m^۳ = \log_{\sqrt[۱۲]{۴}} (\sqrt{۲})^۳ = \log_{۲^{\frac{۱}{۶}}} ۲^{\frac{۳}{۲}} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۶}} \log_۲ ۲ = ۹$$

گزینه ۱ درست است.

$$\text{مبدأ مختصات}(۰,۰) \Rightarrow ۰ = a + b(\frac{۱}{۹})^۰ \rightarrow \boxed{a+b=۰} \quad ①$$

$$y = -۲ \xrightarrow{۲x-y-۱=۰} x = -\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{جاگذاری در } f} -۲ = a + b(\frac{۱}{۹})^{-\frac{۱}{۲}} \rightarrow \boxed{-۲ = a + ۳b} \quad ②$$

$$① \text{ و } ② \Rightarrow \begin{cases} a+b=۰ \\ a+۳b=-۲ \end{cases} \rightarrow b=-۱, a=۱ \Rightarrow f(x) = ۱ - ۱(\frac{۱}{۹})^x$$

$$\boxed{f(x) = ۱ - ۳^{-۲x}} \xrightarrow{\text{پیدا کردن ضابطه } f^{-۱}} x = ۱ - ۳^{-۲y} \rightarrow ۳^{-۲y} = ۱ - x$$

$$\xrightarrow[\text{در پایه ۳ می‌گیریم}]{\text{از طرفین لگاریتم}} \log_۳ ۳^{-۲y} = \log_۳ (۱-x) \rightarrow -۲y \times \cancel{\log_۳ ۳}^{۱} = \log_۳ (۱-x)$$

$$\rightarrow y = -\frac{۱}{۲}\log_۳ (۱-x) \rightarrow \boxed{f^{-۱}(x) = -\log_۳ \sqrt{۱-x}}$$

گزینه ۴ درست است.

چون جمعیت شهر، سالانه یک درصد کاهش می‌یابد، با یک دنباله هندسی با قدر نسبت $۱ - \frac{۱}{۱۰۰} = \frac{۹۹}{۱۰۰}$ مواجهیم. پس:

جمعیت فعلی (اولیه) — جمعیت در سال t

$$A \times (۰/۹۹)^t = \frac{A}{۲} \Rightarrow$$

$$\frac{۱}{۲} = (۰/۹۹)^t \xrightarrow[\text{از طرفین log}]{} \log(\frac{۱}{۲}) = \log(۰/۹۹)^t$$

$$\log ۱ - \log ۲ = t \times \log \frac{۹۹}{۱۰۰} \rightarrow ۰ - ۰/۳ = t(\log ۹۹ - \log ۱۰۰)$$

$$-۰/۳ = t(۱/۹۹۵ - ۲) \rightarrow -۰/۳ = t \times (-۰/۰۰۵)$$

$$t = ۶۰ \text{ سال}$$

آزمون‌های سراسری گاج

www.mapedu.ir

۱

$$(\sqrt{2})^{\frac{1}{x}} > (2^2)^x \Rightarrow 2^{\frac{1}{2x}} > 2^{2x} \Rightarrow \frac{1}{2x} > 2x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x} - 2x > 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1-4x^2}{2x}}_{P(x)} > 0$$

x		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$	
P(x)	+	0	−	ت ن	+	0	−

$$\begin{cases} P(x) > 0 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{\cap} x \in (0, \frac{1}{2})$$

بنابراین حداکثر مقدار $b-a$ برابر $\frac{1}{2}$ است.

۱ پایهٔ تابع نمایی b^x مثبت و مخالف یک است.

$$\begin{cases} \frac{4-a}{a+2} > 0 \Rightarrow -2 < a < 4 \\ \frac{4-a}{a+2} \neq 1 \Rightarrow a \neq 1 \end{cases} \xrightarrow[a \in \mathbb{Z}]{\cap} a \in \{-1, 0, 2, 3\}$$

مجموع مقادیر ممکن برای a برابر ۴ است.

۱

$$f(0) = g(0) \Rightarrow 3^b = 1 \Rightarrow b = 0$$

$$f(1) = g(1) \Rightarrow 3^{a+b} = 3 \xrightarrow{b=0} 3^a = 3 \Rightarrow a = 1$$

$$f(x) = 3^x \Rightarrow 1 + 9f(-2) = 1 + 9 \times 3^{-2} = 2$$

۱

$$2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$\log_3(2x-1) > 0 \Rightarrow 2x - 1 > 1 \Rightarrow x > 1$$

$$D_f = \{x \mid x > \frac{1}{2}\} \cap \{x \mid x > 1\} = (1, +\infty)$$

۲

$$f(\sqrt{2}) = \log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow A(\sqrt{2}, \frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow B(\frac{1}{2}, \sqrt{2}) \in f^{-1}(x)$$

$$|AB| = \sqrt{(\frac{1}{2} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} - \frac{1}{2})^2} = \sqrt{2(\sqrt{2} - \frac{1}{2})^2}$$

$$= \sqrt{2}(\sqrt{2} - \frac{1}{2}) = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱

$$A = (\log_6 4)^2 + (\log_6 9)^2 + (\log_6 16)(\log_6 16 + \log_6 \frac{9}{16})$$

$$A = (\log_6 4)^2 + (\log_6 9)^2 + \log_6 16 \log_6 9$$

$$A = (\log_6 4)^2 + (\log_6 9)^2 + 2(\log_6 4)(\log_6 9)$$

$$= (\log_6 4 + \log_6 9)^2 = (\log_6 36)^2 = 4$$

مشابه سؤال کنکور سراسری سال ۱۴۰۰

۲ فرض می‌کنیم $\log_x y = A$ باشد، در این صورت $\log_y x = \frac{1}{A}$ خواهد بود.

$$A + 3 = \frac{4}{A} \xrightarrow{\times A} A^2 + 3A - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \Rightarrow x = y \text{ غ ق ق} \\ A = -4 \Rightarrow \log_x y = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = x^{-4} \Rightarrow y = \frac{1}{x^4} \Rightarrow x^4 y = 1$$

برگرفته از کنکور سراسری تجربی سال ۱۴۰۰

۱

$$|3x| - |x+1| > 0 \Rightarrow |3x| > |x+1| \Rightarrow (3x + x + 1)(3x - x - 1) > 0$$

$$\Rightarrow (4x+1)(2x-1) > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - [-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \Rightarrow n - m = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

برگرفته از کنکور تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲

$$\frac{2^{\sqrt{x+4}}}{(3^{\log_3 2})^x} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2^{\sqrt{x+4}}}{2^x} = 2^{-2} \Rightarrow \sqrt{x+4} - x = -2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+4} = x - 2 \Rightarrow x + 4 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 5x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ غ ق ق} \\ x = 5 \Rightarrow \log(x^2 + x + 70) = \log(25 + 5 + 70) = \log 100 = 2 \end{cases}$$

۳

$$ax + b = 0 \xrightarrow{x=2} 2a + b = 0 \Rightarrow 2a = -b \Rightarrow \frac{b}{a} = -2$$

$$\log_3 \sqrt{\frac{a-b}{a}} = \log_3 \sqrt{1 - \frac{b}{a}} = \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$$

۳ **یادآوری:**

$$a^{\log_a b} = b$$

$$2\log_{25} \sqrt{27} + \log_5 2 = 2\log_{5^2} \sqrt{27} + \log_5 2$$

$$= \frac{2}{2}\log_5 \sqrt{27} + \log_5 2$$

$$= \log_5(2\sqrt{27}) = \log_5(2 \times 3\sqrt{3}) = \log_5 6\sqrt{3} \quad (*)$$

$$\Rightarrow 5^{(2\log_{25} \sqrt{27} + \log_5 2)} \overset{(*)}{=} 5^{\log_5 6\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$$

۴

$$۴^{۱-\frac{x}{۲}}-(\frac{۱}{۲})^{x+۱}=۵۶ \Rightarrow (۲^{۲})^{۱-\frac{x}{۲}}-(۲^{-۱})^{x+۱}=۵۶$$

$$\Rightarrow ۲^{۲-x}-۲^{-x-۱}=۵۶ \Rightarrow ۴\times ۲^{-x}-\frac{۱}{۲}\times ۲^{-x}=۵۶$$

$$\Rightarrow ۲^{-x}(۴-\frac{۱}{۲})=۵۶ \Rightarrow ۲^{-x}(\frac{\cancel{۷}}{۲})=\cancel{۷}\times ۸ \Rightarrow ۲^{-x}=۱۶=۲^{۴}$$

$$\Rightarrow -x=۴ \Rightarrow x=-۴$$

۱

$$f(x)=\log_{۲+x}(۲-x)$$

$$f(\sqrt{۳})=\log_{۲+\sqrt{۳}}(۲-\sqrt{۳})$$

از طرفی داریم:

$$۲-\sqrt{۳}=\frac{(۲-\sqrt{۳})\times(۲+\sqrt{۳})}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۴-۳}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}$$

بنابراین:

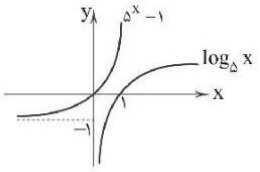
$$\Rightarrow f(\sqrt{۳})=\log_{۲+\sqrt{۳}}\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}=\log_{۲+\sqrt{۳}}(۲+\sqrt{۳})^{-۱}=-۱$$

$$f(۱)=\log_{۲+۱}(۲-۱)=\log_{۳}۱=۰$$

$$f(۰)=\log_{۲+۰}(۲-۰)=\log_{۲}۲=۱$$

$$\Rightarrow \frac{f(\sqrt{۳})+f(۱)}{f(۰)}=\frac{-۱+۰}{۱}=-۱$$

۱ کافی است نمودار هر دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم:



همان‌طور که از شکل پیداست، این دو تابع نقطهٔ تلاقی ندارند.

۱ طبق رابطه‌ی $\log E=۱۱/۸+۱/۵M$ داریم:

$$\log E=۱۱/۸+۱/۵(۶/۶)=۲۱/۷ \Rightarrow E=۱۰^{۲۱/۷}$$

۱

$$(\frac{1}{2})^{x^2} > (\frac{1}{2})^{4x} \Rightarrow x^2 < 4x \Rightarrow x(x-4) < 0 \Rightarrow 0 < x < 4$$

۲

$$5^{3n-1} = 5^{6n+3} \Rightarrow 3n-1 = 6n+3 \Rightarrow n = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 3n+4 = 0 \Rightarrow (1+\sqrt{2})^{3n+4} = (1+\sqrt{2})^0 = 1$$

۴ اگر $f(x)$ تابع نمایی باشد باید به صورت a^x تبدیل شود، پس:

$$3-m=0 \Rightarrow m=3 \Rightarrow f(x)=2^{-x}=(\frac{1}{2})^x$$

نقطه $(2, 0/25)$ روی این تابع قرار دارد.

۴ در توابع نمایی نزولی چنین اتفاقی می‌افتد.

$$0<a+1<1 \Rightarrow -1<a<0$$

۲

$$\log_3(2\times 3^x - 5) = x \Rightarrow 2\times 3^x - 5 = 3^x \Rightarrow 3^x = 5$$

$$\Rightarrow x = \log_3 5$$

۱

$$\log\frac{\sqrt{27}}{\sqrt[4]{5}} = \log\sqrt{3^3} - \log\sqrt[4]{5}$$

$$=\frac{3}{2}\log 3 - \frac{1}{4}\log 5 = \frac{3}{2}(0/48) - \frac{1}{4}(1-0/3)$$

$$=3\times(0/24) - \frac{1}{4}\times 0/7 = 0/72 - 0/175 = 0/545$$

۲

$$\log_7(x+1)(x^2-x+1) = 3 \Rightarrow x^3+1 = 8 \Rightarrow x^3 = 7$$

$$\Rightarrow x^6 = 49 \Rightarrow x^6 + 51 = 100$$

$$\log(x^6+51) = \log 100 = 2$$

۲ طبق شکل ریشه $a+bx=0$ عدد ۲ است.

$$a+2b=0 \Rightarrow a=-2b$$

از طرفی $f(1)=0$ است. پس:

$$\log(a+b)=0 \Rightarrow a+b=1 \xrightarrow{a=-2b} -2b+b=1$$

$$\Rightarrow b=-1, a=2$$

$$\Rightarrow f(x)=\log(2-x) \Rightarrow f(0)=\log 2 \Rightarrow c=\log 2$$

۲ (تعداد اولیه باکتری‌ها) $p(0)=100$

$$8\times 100 = 100\times 4^t \Rightarrow 2^3 = 2^{2t} \Rightarrow t = \frac{3}{2} = 1/5$$

۳

$$\log E = 11/8 + 1/5M \Rightarrow \log E = 11/8 + (1/5)\times 4 = 17/8$$

$$\Rightarrow E = 10^{17/8} \Rightarrow a = 17/8$$

$$\log 10^{2a} = 11/8 + 1/5M \Rightarrow 17/8\times 2 = 11/8 + 1/5M$$

$$\Rightarrow M = 15/87$$

۳

$$4 = 4\log x - (\log x)^2 \Rightarrow (2-\log x)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow \log\sqrt[3]{x} = \frac{2}{3}$$

۱

$$4\times 3^{2x} = 4\sqrt{3} \Rightarrow 3^{2x} = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$[\log_5(16x+1)] = [\log_5 5] = 1$$

۴

$$\log_{\sqrt{x}} 2x = \frac{\log 2x}{\log\sqrt{x}} = \frac{\log 2 + \log x}{\frac{1}{2}\log x} = 2(\log_x 2 + 1)$$

$$=2(\frac{1}{\log_2 x}+1) = 2(\frac{1}{n}+1) = \frac{2n+2}{n}$$